

Option Pricing By Nikivorou-Ovarov Differential Resolution Method¹

Mehdi Abuvali², Maryam Iraqi Khalili³, Hassan Hassanabadi⁴,
Ahmad Yaghubonjad⁵

Received: 2021/04/21

Accepted: 2021/09/16

Research Paper

Abstract

The Black-Scholes pricing theory is one of the most important ways of valuating transaction options. This equation is used to pricing a variety of European options. In this paper, a new and different method was developed to prove and improve the Black-Scholes equation by focusing on the Black-Scholes main Schrödinger equation and solving this equation using the Nikkeuro-Ovaryov method. In the following, while investigating the possibility of improving the Black-Scholes equation with this method, a new equation for the pricing of transaction options was presented and tested. Increasing the accuracy of pricing arbitrary deals by using the equation provided, especially for high-value trades, checking logical solution in a new way, comparing output with numerical solution and innovating. Final formula. Option based on Lagrange polynomial functions, the goals of doing research are present. The results showed a different positive probability for the Black-Scholes equation by solving the differential equation by the method Nikkirovo-Ovaryov is feasible and at 95% confidence level, there is no significant difference between the price of the two main black-hole groups and the new model. In order to compare the output of the new model with the Black Sholes main model, information from the 50 Saffron Deal options in Iran's Overseas Branch was limited to the 1395 to 1398 period and the Mann-Whitney independent nonparametric group was used to compare.

Key Words: Transaction Option; Black Scholes Pricing Equation; Schrödinger Equation; Method Nikki Voru - Ovarov Parameter.

JEL Classification: F20, E37, G12

1. DOI: 10.22034/JSE.2020.11314.1512

2. PhD student, Financial Department, Research Science Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

3. Assistant Professor of Accounting Department, Faculty of Management, University of Tehran, Iran
(Corresponding Author) m.khaliliaaraghi@gmail.com.

4. Professor of Physics Department, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

5. Associate Professor of Accounting Department, Tehran Center, Islamic Azad University, Tehran, Iran.



سازمان بورس و اوراق بهادار، مرکز پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی
فصلنامه بورس و اوراق بهادار، سال چهاردهم، شماره ۵۵، پاییز ۱۴۰۰، صص ۱۲۸-۱۱۱

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک روش نیکی وورو - اوواروف^۱

مهدي ابوالی^۲، مریم خلیلی عراقی^۳، حسن حسن آبادی^۴، احمد یعقوب نژاد^۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۲۵

مقاله پژوهشی

چکیده

اوراق اختیار معامله از ابزارهای بازارهای مالی بوده و قیمت گذاری این اوراق با معادله‌ی قیمت گذاری بلک شولز بسیار متداول است. این معادله جهت قیمت گذاری اختیارهای اروپائی استفاده می شود. با توسعه و بکارگیری علوم ریاضی در مباحث مالی، امکان ارائه‌ی مدل‌های جدیدتر قیمت گذاری اختیار معامله فراهم شده است. در این مقاله با بکارگیری روش جدید حل معادله دیفرانسیل نیکی وورو - اوواروف، امکان ارائه‌ی مدل متفاوت و جدید قیمت گذاری اختیار معامله بررسی گردید. افزایش دقت قیمت گذاری، رفع نواقص مدل بلک شولز، حل منطقی با مدلی جدید و قابلیت مقایسه‌ی خروجی با حل عددی، اهمیت و نوآوری پژوهش حاضر می باشند. نتایج نشان داد؛ امکان ارائه‌ی مدلی جدید برای قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با بکارگیری روش نیکی وورو - اوواروف امکان پذیر بوده و در سطح اطمینان ۹۵ درصد بین قیمت گذاری روش جدید و مدل بلک شولز تفاوت معنادار وجود ندارد. دقت بیشتر قیمت گذاری برای مبالغ بالا، امکان بکارگیری معادله در قیمت گذاری اوراق اختیار معامله‌های اروپایی و آمریکایی و در نهایت اعمال محدودیت‌های کمتر اثبات معادله، مزیت‌های مدل جدید هستند. به منظور مقایسه‌ی مدل جدید و مدل اصلی بلک شولز از اطلاعات ۱۵۰ اختیار معامله زعفران در فرابورس ایران از سال ۱۳۹۶ لغایت ۱۳۹۸ استفاده و از آزمون مقایسه‌ای دو گروه مستقل ناپارامتریک من ویتنی استفاده گردید.

واژه های کلیدی: اختیار معامله، معادله قیمت گذاری بلک شولز، معادله شرو دینگر گونه و روش پارامتری نیکی وورو - اوواروف.

طبقه بندی موضوعی: F20, E37, G12

DOI: 10.22034/JSE.2020.11314.1512

۱. دانشجوی دکتری، گروه مالی، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
۲. استادیار گروه حسابداری، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، ایران (نویسنده مسئول) m.khaliliaraghi@gmail.com
۳. استادیار تمام، گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.
۴. دانشیار، گروه حسابداری، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
- ۵.

مقدمه

در سال ۱۹۷۳ میلادی داد و ستد اوراق اختیار معامله در بورس اختیار معامله‌ی شیکاگو آغاز شد. بعدها روش نوآورانه‌ی فیشر بلک^۱، رابرت مرتون^۲ و میرون شولز^۳ جهت قیمت گذاری اوراق اختیار معامله ارائه گردید. روش آنها با عنوان الگوی قیمت گذاری بلک شولز مشهور است. در مدل قیمت گذاری بلک شولز عواملی نظیر قیمت توافقی، قیمت پایه دارایی، نوسان-پذیری انتظاری، زمان تا سررسید و نرخ بهره بدون ریسک تأثیرگذار می‌باشند.

مشکلاتی همانند مفروضات مدل، عدم تطبیق با توزیع آماری داده‌های قیمت سهام، فرض بازار کامل، عدم دخالت هزینه‌ی معامله‌های و عدم کاربرد در قیمت گذاری اوراق اختیار آمریکایی بر مدل بلک شولز مترتب می‌باشند. با بکارگیری علوم ریاضی و فیزیک در مباحث مالی، مدل قیمت گذاری اختیار معامله بلک شولز توسط پژوهشگران و با روش‌های مختلف تعدیل شده است. بتازگی روش‌های حل بر اساس پارامترهای وابسته به زمان و بدون وقفه‌ی بازپرداخت، پیشنهاد شده است (کومار و سینگ، ۲۰۱۴، صص ۱۷۷-۱۸۳). تجزیه و تحلیل قیمت اختیار معامله را می‌توان در طول زمان با یک معادله دیفرانسیل جزئی توصیف کرد. توسعه‌ی مدل بر اساس تطبیق معکوس عددی با تبدیل لاپلاس و روش اختلاف محدود و یا تحولات متغیر بر اساس تغییر ملین و روش‌های حل تقریبی برای حل معادله صورت پذیرفته است. (آهن، کوون و کانگ^۴، ۲۰۱۰، صص ۲۴۷-۲۵۵) در این مقاله معادله‌ی قیمت گذاری اختیار معامله بلک شولز را از طریق تمرکز بر روش حل مبنایی معادله‌ی بلک شولز یعنی معادله‌ی شرودینگر گونه‌ی اصلی و حل آن به کمک روش نیکی وورو - اوواروف^۵ توسعه می‌دهیم. مبنای پژوهش در این مقاله تحلیلی و کاربردی است. در حوزه‌ی تحلیلی، ارائه‌ی معادله جدید قیمت گذاری اوراق اختیار معامله بررسی و در حوزه‌ی کاربردی امکان بکارگیری و قیمت گذاری اوراق با مدل جدید، ارزیابی می‌شود. اهمیت و هدف این پژوهش، کاهش نواقص مدل قیمت گذاری بلک شولز همانند امکان قیمت گذاری هر دو نوع اوراق اروپایی و آمریکایی با مدل پیشنهادی و افزایش قابلیت آن با بکارگیری روش‌های جدید حل معادلات دیفرانسیل همانند روش پارمتری نیکی وورو - اوواروف است.

1. Fisher Black
2. Robert Merton
3. Myron Scholes
4. Ahn J, Kang S, Kwon YH
5. NikkiVoro - Ovarov

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

مبانی نظری

قیمت‌گذاری قرارداد اختیار به سه عامل اثرگذار تفاوت قیمت توافقی آن اختیار معامله و دارایی پایه، تعداد روزهای باقی‌مانده به انقضا و نوسان‌پذیری انتظاری آن دارایی در روزهای باقیمانده وابسته است. طرح مفاهیم انتظارات تصادفی و سنج‌های معادل به ریاضیدانان مالی امکان داد؛ فرمول‌هایی برای قیمت‌گذاری اوراق مشتقه بیابند. این طرح در ابتدا به هنری لوبگ^۱ تعلق داشت. هنری لوبگ و دیگران در آغاز قضایای درستی برای احتمالات تعریف نمودند. یکی از فرمول‌های ریاضی که امروزه بسیار مورد استفاده‌ی مهندسان مالی است؛ اصطلاحاً *لم ایتو* نامیده می‌شود. این عنوان از نام ریاضیدان ژاپنی کیوشی ایتو گرفته شده است. وی برای مدل‌سازی فرایندهای مارکوف، معادلات دیفرانسیل تصادفی را شکل داد. *لم ایتو* از معادلات ارائه شده به شکل جدیدی از معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌رسد. عملاً *ایتو* پدر معادلات دیفرانسیل تصادفی شناخته می‌شود و پایه‌های حسابان تصادفی را می‌ریزد. بعدها آقاییان فیشر بلک و مِیرن شولز و رابرت مِرتون بر پایه مطالعات ایتو گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. در اوایل دهه ۱۹۳۰، استفاده از اختیار معامله برای خرید و فروش پياز لاله‌های هلندی در بازار معامله‌های آمستردام رواج پیدا کرد. (جان هال^۲، ۱۳۸۸، صص ۱۵۲-۲۵۰) در سال ۱۹۷۳، کمیته مبادلات شیکاگو یک بورس انحصاری برای اختیار معامله‌های بر روی سهام تشکیل داد. بورس اختیار معامله شیکاگو در ۲۶ آوریل ۱۹۷۳، درهای خود را به‌روى معامله‌های اختیار خرید گشود و مبادله اختیار معامله روی سهام در سال ۱۹۷۵ در بورس سهام آمریکا و بورس سهام فیلادلفیا راه‌اندازی گردید. در حال حاضر، بخش اعظم این معامله‌ها در بورس‌های سازمان‌یافته صورت می‌پذیرد. (رومان و ایوانف، ۲۰۱۵، صص ۹۷۹-۹۹۳) در بازارهای مالی قیمت‌گذاری صحیح این اوراق اهمیت فراوانی دارند. طبیعی است که اختیار معامله‌های پرنوسان، گران‌تر از اختیارهای کم‌نوسان باشند. اولین مدل در زمینه قیمت‌گذاری اختیار معامله توسط لوئیس باچلیر^۳ در سال ۱۹۰۰ ارائه شده است. وی نتیجه گرفت که ارزش مورد انتظار اختیار معامله در زمان سررسید برابر معادله یک می‌باشد:

1. Henry Lobugh

2. John Hall

3. Louise Bachelier

$$c = s - \Phi\left(\frac{s-x}{\delta\sqrt{t}}\right) - x\Phi\left(\frac{s-x}{\delta\sqrt{t}}\right) + \delta\sqrt{t} + \Phi\left(\frac{s-x}{\delta\sqrt{t}}\right) \quad (1)$$

در این فرمول s قیمت سهام عادی پایه، x قیمت توافقی قرارداد اختیار معامله، t زمان تا سررسید، δ انحراف معیار بازدهی و $Q(i)$ توزیع نرمال تجمعی استاندارد است. مدل باچلیر سپس توسط کروایزینگا^۱ در سال ۱۹۵۶ میلادی مورد تعدیل قرار گرفت. اکثر پیشرفت‌های بدست-آمده در قیمت گذاری اوراق اختیار معامله، برای بیش از نیم قرن مدل‌های اقتصادسنجی موردی^۲ بوده‌اند. (الغلیص^۳، ۲۰۱۸، ص ۴۴۳) معادله دو، مدل ارائه شده توسط کاسوف^۴ در سال ۱۹۶۹ نمونه‌ای از این دست مدل‌ها می‌باشد.

$$c = x\left\{\left[\left(\frac{s}{x}\right)^y + 1\right]^{\frac{1}{y}} - 1\right\}, 1 \leq y \leq \infty \quad (2)$$

طبق این فرمول حد بالای قیمت اختیار خرید برابر با قیمت سهام و حد پایین قیمت اختیار برابر با ارزش ذاتی آن یعنی $\text{Max}(s-x, 0)$ می‌باشد. در ادامه و در دهه ۶۰ میلادی یکی از مشهورترین مدل‌های قیمت گذاری اختیار معامله تحت عنوان مدل قیمت گذاری بلک شولز ارائه گردید. این مدل با فرمولی مشخص قیمت اختیار معامله را برآورد می‌نماید. مدل بلک شولز مرتون، مدلی ریاضی از یک بازار مالی شامل ابزارهای سرمایه گذاری مشتقه است. کاربرد این مدل قیمت گذاری اوراق اختیار اروپایی است. معادله ۳ به فرمول بلک شولز معروف است. (جان هال، ۱۳۸۸، صص ۲۵۰-۳۸۰)

$$v_0 = v_s N(d_1) - \frac{E}{e^{rt}} N(d_2) \quad (3)$$

$$d_1 = \frac{L_n\left(\frac{v_s}{E}\right) + \left[r + \frac{1}{2}(\delta^2)\right]t}{\delta\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{L_n\left(\frac{v_s}{E}\right) + \left[r - \frac{1}{2}(\delta^2)\right]t}{\delta\sqrt{t}} = d_1 - \delta\sqrt{t}$$

در این فرمول v_0 ارزش یک اختیار خرید، v_s قیمت جاری سهام، E قیمت توافقی، r نرخ بهره مرکب سالانه، t زمان تا سررسید اختیار معامله، $N(di)$ تابع توزیع فراوانی نرمال و δ انحراف معیار بازده سالانه سهم است. کاربرد مفاهیم فیزیک و ریاضی برای حل مسائل مالی مستلزم ایجاد ارتباط دقیق بین مفاهیم فیزیکی با مسائل و مشکلات مالی و اقتصادی دارد. اخیراً،

1. Kruisenga
2. Adhoc Econometric Models
3. Alghalith M
4. Kassouf

پژوهشگران و تحلیلگران مالی با استفاده از روش‌های پیشرفته ریاضی توانسته‌اند؛ مدل‌های نوینی طراحی کنند که در مقابل تغییرات بازار از خود واکنش نشان داده و برخی از مشکلات مدل بلک شولز را پوشش دهد. مدل‌های ریاضی همانند روش‌های شبیه‌سازی، درختی و بویژه روش -های حل دیفرانسیلی از پیشرفته‌ترین روش‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله هستند. وجود برخی از مشکلات مترتب بر مدل بلک شولز کاربرد گسترده‌ی آنرا با چالش مواجه کرده است. در نتیجه توسعه‌ی این مدل همواره مورد توجه پژوهش‌گران مالی قرار گرفته است.

پژوهش‌های زیادی در حوزه‌های مالی ریشه در تحقیقات فیشر بلک، مایرون شولز و مرتن دارند و بر پایه‌ی کار آنان شکل می‌گیرند. مفهوم اساسی در این تحقیقات مفهوم نیکویی^۱ است. استفاده از این واژه مربوط به پایداری^۲ مدل‌های مالی تحت فرضیات مختلف و پارامترهای مختلف است. چقدر سیستم‌های اقتصادی و مالی در بازارهای مختلف و شرایط مختلف بازار مؤثر و پایداری می‌باشند. در ریاضیات مالی این مفهوم نخست در شکل قیمت‌گذاری اختیار معامله نمایان شد. ما با حل معادله‌ی پایه بلک شولز که از لم ایتو مستخرج و به معادله شرودینگر گونه مشهور است؛ از طریق روش حل معادله دیفرانسیل به روش نیکی وورو - اووارف سعی داریم مدلی جدید ارائه نموده که در دامنه وسیع‌تری از اوراق همانند قیمت -گذاری اختیار معامله‌های اروپایی و آمریکایی کاربرد داشته باشد. این مدل می‌تواند یکی از نواقص مترتب بر مدل اصلی بلک شولز را مرتفع سازد. در حل بسیاری از مسائل می‌توان از توابع خاص برای ارائه‌ی جواب‌ها استفاده کرد. توابع خاص از حل معادله دیفرانسیل‌هایی معروف همانند فوق هندسی^۳، ژاکوبی^۴، لژاندر^۵ و غیره بدست می‌آیند. روش نیکی وورو - اووارف مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل بر اساس روش فروبینیوس^۶ می‌باشد که منجر به توابع خاص می‌شود. از آنجاییکه ویژگی‌های توابع خاص شناخته شده هستند، می‌توان از این ویژگی‌ها برای بررسی رفتار جواب‌های بدست آمده در مسائل استفاده نمود. روش نیکی وورو - اووارف می‌تواند بطور مستقیم به حل معادلات دیفرانسیل پرداخته و حتی مؤثرتر و کارآمدتر از سایر روش‌های استاندارد موجود و در دستگاه‌های مختصات مختلف، حل معادلات دیفرانسیل درجه دو را نتیجه دهد. این روش با حل منطقی معادلات درجه دوم، مقادیر دقیق این معادلات را مشخص می‌کند. توابع نتیجه شده از حل معادلات با این روش، متعامد می‌باشند که این مصداقی بر مفید و مؤثر بودن

1. Robustness
2. Sustainability
3. Geometric method
4. Jacobi Method
5. Legendre's Method
6. Frobenius method

```

graph TD
    Start(( )) --> A[انتخاب متغیرهای ورودی]
    A --> B[انجام تعديلات ابتدایی]
    B --> X1{X}
    X1 -- خیر --> A1((A))
    A1 --> A
    X1 -- بله --> C[استفاده از روش نوآورانه جهت حل مسئله]
    C --> X2{X}
    X2 -- خیر --> B1((B))
    B1 --> B
    X2 -- بله --> D[معادله خروجی]
    D --> X3{X}
    X3 -- خیر --> C1((C))
    C1 --> C
    X3 -- بله --> E[آزمون خروجی]
    E --> F[بخت و نتیجه گیری]
    F --> End((( )))
  
```

The diagram is a BPMN process flow for a 'پارچوب نظری پژوهش' (Theoretical Research Framework). It is organized into swimlanes: 'مدیرهای مسئول' (Responsible managers), 'لحام جدیدان' (New welders), 'روش' (Method), 'خروجی مدل' (Model output), and 'آزمون' (Test). The process starts with 'انتخاب متغیرهای ورودی' (Select input variables) in the 'مدیرهای مسئول' swimlane. It then moves to 'انجام تعديلات ابتدایی' (Initial adjustments) in the 'لحام جدیدان' swimlane. A decision point 'X' follows, with a 'خیر' (No) path leading to a task 'A' and a 'بله' (Yes) path leading to 'استفاده از روش نوآورانه جهت حل مسئله' (Use innovative method for problem solving) in the 'روش' swimlane. Another decision point 'X' follows, with a 'خیر' (No) path leading to a task 'B' and a 'بله' (Yes) path leading to 'معادله خروجی' (Output equation) in the 'خروجی مدل' swimlane. A third decision point 'X' follows, with a 'خیر' (No) path leading to a task 'C' and a 'بله' (Yes) path leading to 'آزمون خروجی' (Output test) in the 'آزمون' swimlane. The process ends with 'بخت و نتیجه گیری' (Chance and conclusion) in the 'آزمون' swimlane.

فرآیند (۱): چارچوب نظری پژوهش

پیشینه پژوهش

بررسی پیشینه‌ی پژوهش حاضر معطوف به مطالعه‌ی تحقیقات انجام شده در ارتباط با معادله‌ی بلک شولز، تغییرهای صورت گرفته پیرامون آن و در نهایت استفاده از روش‌های حل متنوع جهت ارائه‌ی معادله‌ای متفاوت از معادله‌ی بلک شولز استوار است.

ماتیواستارم، توماس هانگیتون و داگلاس^۱ در مقاله‌ای با عنوان "استفاده از رویکرد مدل قیمت-گذاری اختیارات برای ارزیابی تصمیمات استراتژیک در محیط‌های پر تلاطم" نشان دادند؛ نسخه اصلاح شده از فرمول قیمت گذاری اختیار معامله بلک شولز، به طور گسترده‌ای در مباحث مالی استفاده می‌شوند. (ماتیواستارم، توماس هانگیتون و داگلاس، ۲۰۱۷، صص ۴۳۷ - ۴۴۹)

وی‌ال خاستکویچ^۲ در مقاله‌ای با عنوان "یک راه حل منحصر به فرد برای معادله دیفرانسیل بلک شولز با مشتقات جزئی نیمه خطی برای ارزیابی دارایی‌ها در اختیارات آمریکایی" یک روش برای حل مشکل مرزی قیمت گذاری اختیارات بر اساس معادله بلک شولز در نظریه اختیارات و براساس نمایندگی از شرایط مرزی مشخص ارائه نمودند. نتایج امکان پذیر بودن حل مشکل مرزی قیمت گذاری را اثبات می‌کند (وی‌ال خاستکویچ، ۲۰۱۵، صص ۱۱۵۷ - ۱۱۶۴). رومان و ایوانف^۳ در مقاله‌ای با عنوان "فرآیند توزیع حداکثر گامای واریانس و مسیر قیمت گذاری اختیارات" در مورد امکان دستیابی به نتایج صریح برای فرآیند گامای واریانس بحث کردند. این مقاله یک فرآیند گاما واریانس را به عنوان تغییر زمان حرکت براونری بررسی می‌کند. (رومان و ایوانف، ۲۰۱۵، صص ۹۷۹ - ۹۹۳)

نوآوری معاویا الغلیص^۴ در مقاله‌ای با عنوان "قیمت گذاری اختیارات: فرمول بسیار ساده" اقدام به ارائه فرمول‌های ساده‌ای نمودند که رابطه مثبت بین قیمت اختیار و نوسان و زمان بلوغ را نشان می‌دهد. (معاویا الغلیص، ۲۰۱۴، صص ۷۱ - ۷۶)

همتا و امرشی^۵ در مقاله‌ای با عنوان "قیمت گذاری اختیار کراک با کپسول"^۶ از این اختیار برای قیمت گذاری استفاده کردند. نتایج آنها نشان داد که همپوشانی و مدل‌های استاندارد، قیمت نامناسبی را ارائه می‌دهند و مدل کلیتون^۷ مناسب تر است. مدل آنها به ادبیات مشتقات انرژی با

1. Matthew Starm, Thomas Hunstantin and Douglas

2. Soastkitch

3. Roman and Ivanov

4. Moawia Alghalith

5. Hemantha S. B. HerathEmail authorPranesh KumarAmin H. Amershi

6. Crack spread option pricing with copulas

7. Clayton

نشان دادن کاربرد مدل‌های مخروطی به قیمت گذاری، کمک می‌کند (همتا و امرشی، ۲۰۱۴، صص ۱۰۰ - ۱۲۱)

استیون لی^۱ در مقاله‌ای تحت عنوان "هزینه تلویحی تعاملات توسط مدل قیمت گذاری اختیارات لند"^۲ با هدف ارائه یک روش جایگزین برای برآورد هزینه‌های معامله در بورس از طریق هزینه‌های معامله تلویحی با استفاده از مدل قیمت گذاری اختیار لند اقدام نمودند. نتایج پژوهش، بررسی دقت هزینه‌های معامله تلویحی معامله شده در میان اختیارات بدون مالیات و بلوغ و تغییر هزینه‌های معامله معقول در دوره بحران مالی اخیر جهانی بوده است. (استیون لی، ۲۰۱۲، صص ۳۳۳ - ۳۶۰)

ژان پیر و پی تاشمن^۳ در مقاله‌ای با عنوان "قیمت گذاری اختیارات تحت مدل استرس بتا" یک مکانیزم رژیم سوئیچینگ^۴ را به یک مدل قیمت گذاری سرمایه نسبت داده‌اند. آنها دریافتند این مدل که یکی از ویژگی‌های برجسته در بازار اختیارات آتی است؛ قادر به ایجاد چولگی نوسانی می‌باشد. (ژان پیر و پی تاشمن، ۲۰۱۲، صص ۲۰ - ۱۸۲)

لی منگ می وانگ^۵ در مقاله‌ای با عنوان "مقایسه فرمول بکل شولز با فرمول بلک شولز فرکشنال"^۶ در بازار مشتقات بورس با تغییر نوسان "فرمول قیمت گذاری اختیار معامله فرکشنال را با استفاده از فرمول بلک شولز اختیار معامله استنتاج کردند. نتایج آنها نشان داد؛ هنگامی که نوسانها کوچکتر است، خطای میانگین خطی تقارن بلک شولز بزرگتر از مدل سنتی است. (لی منگ می وانگ، ۲۰۱۰، صص ۹۹ - ۱۱۱)

دودو و اسکایلت^۷ در مقاله‌ای با عنوان "قیمت گذاری اختیار معامله های آمریکایی تحت نوسان تصادفی و نرخ بهره تصادفی" رویکرد جدیدی را برای قیمت گذاری اختیار معامله های آمریکایی ارائه نمودند. نتایج آنها نشان داد که اثرات حاصل از به کارگیری نرخ بهره و نوسان تصادفی قیمت‌ها در تعیین قیمت صحیح تر و واقعی تر اختیار معامله، بسیار حائز اهمیت است. (دودو و اسکایلت، ۲۰۱۰، صص ۷ - ۲۴)

-
1. Steven Li
 2. Leland option pricing model
 3. Jean-Pierre P. Tashman
 4. regime-switching mechanism
 5. Li MengMei Wang
 6. Fractional
 7. Doodo and Skylight

دی‌مادان^۱ در مقاله‌ای با عنوان "ترکیب فرمول‌های بلک‌شولز با حرکت براونین و اتصال محدود" برخی از روابط جالب بین فرمول بلک‌شولز و آخرین پیام‌های نمایشی براونین را کشف کردند. از نتایج این پژوهش فرمول یوری مشتق شده است. (دی‌مادان، ۲۰۰۸، صص ۹۷-۱۱۵)

کریستوفرسن و همکاران^۲ در مقاله‌ای با عنوان "تعیین قیمت اختیار معامله با مولفه‌های نوسان کوتاه‌مدت و بلندمدت" مدل جدیدی برگرفته از مدل انجل و لی^۳ (۱۹۹۹) و هستون و نندی^۴ (۲۰۰۰) برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی ارائه نمودند. مدل پیشنهادی آنها امکان قیمت‌گذاری آسان‌تر اختیار معامله‌های اروپایی را ممکن ساخت. (کریستوفرسن و همکاران، ۲۰۰۸، صص ۸-۱۵)

ژوچنگ و ژیان‌پینگ‌وان^۵ در مقاله‌ای با عنوان "قیمت‌گذاری اختیارات برای تغییر مسیر نمایی لوی مدل تحت مم" ^۶ مطالعه و ارزیابی منطقی قیمت اختیار اروپایی هنگامیکه فرآیند قیمت اساسی با تغییر فرآیند لوی تغییر می‌کند؛ را بررسی کردند. نتایج آنها ارائه فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت اندازه‌گیری حداقل مارتینگال آنتروپی^۷ بوده است. (ژوچنگ و ژیان‌پینگ‌وان، ۲۰۰۷، صص ۶۵۱-۶۶۴)

خلیلی عراقی و همکاران در پژوهشی با عنوان "قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون" با ورود عامل تلاطم در مدل قیمت‌گذاری با استفاده از مدل هستون، مدلی کارا تر برای قیمت‌گذاری اوراق ارائه نمودند. نتایج پژوهش مؤید این نکته می‌باشد که تفاوت معناداری بین مدل هستون و مدل رایج قیمت‌گذاری اوراق در بورس اوراق بهادار وجود داشته است. (خلیلی عراقی و همکاران، ۱۳۹۵، صص ۷-۱۶)

جلوداری ممقانی و پیکر در مقاله‌ای تحت عنوان "محاسبه ارزش اختیار با استفاده از روش گیلز" به کاربرد همزمان روش وابسته به مسیر برای شبیه‌سازی و برآورد تابع عایدی پرداختند. نتایج نشان داد که استفاده از روش آلاگاندو^۸ در صورت امکان، به نتایج بهتری می‌انجامد. (جلوداری ممقانی و پیکر، ۱۳۹۱، صص ۸-۱۵)

1. D. Madan

2. Christopherson et al

3. Engle and Lee

4. Heston and Nandi

5. Zhucheng and Jian Ping Wan

6. Lévy Model Under Memm

7. Martigal Entropy

8. Alargando

خضری پور قرایی و ستاردباغی در مقاله‌ای با عنوان "یک روش عددی مبتنی بر تفاضلات متناهی صریح برای حل معادله غیرخطی بلک شولز" اثر بازارهای غیرنقدی در ارزش اختیار معامله را بررسی کردند. نتایج آنها نشان داد که برای موارد غیرخطی، یعنی ارزش گذاری اختیار معامله با وجود تغییر قیمت، روش عددی تفاضلات متناهی صریح، جواب عددی قابل قبولی را فراهم می‌آورد. (خضری پور قرایی و ستاردباغی، ۱۳۹۱، صص ۶-۱۷)

شاكران در مقاله‌ای تحت عنوان "روش عددی جدید برای ارزش گذاری اختیارمعامله های آمریکایی" از مدل تلاطم تصادفی هستون^۱ استفاده نمود. آزمون‌های عددی نشان دهنده صحت و دقت روش عددی جدید معرفی شده در این مقاله می‌باشد. بهبود مدل لانگ استف و شوارتز^۲ با کاهش زمان محاسباتی و تورش قیمت گذاری، نتیجه این پژوهش بوده است. (شاكران، ۱۳۹۱، صص ۳-۱۸)

زمانی و زرگری طی پژوهشی تحت عنوان "یک شمای تفاضل متناهی برای محاسبه قیمت اختیار در مدل تلاطم تصادفی" اشاره داشته‌اند که در مدل تلاطم تصادفی، قیمت اختیارهای اروپایی، جواب یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای سهموی است. نتایج نشان داد که در مدل‌های تلاطم تصادفی، بازار کامل نیست و در این بازارها نمی‌توان ریسک را کاملاً پوشش داد. (زمانی و زرگری، ۱۳۸۷، صص ۷-۲۰)

چنانچه ملاحظه گردید؛ در تمام تحقیقات از روش بلک شولز استفاده شده و این مدل ضمن دارا بودن محدودیت‌های مالی، زمینه بهبود و بررسی مجدد را دارا می‌باشد. ما قصد داریم بررسی کنیم که آیا می‌شود با استفاده از معادله‌ای دیگر که محدودیت کمتری دارد، به نتیجه‌ای متفاوت دست یافت؟

فرضیه‌های پژوهش

بین خروجی مدل جدید ارائه شده و مدل اصلی بلک شولز تفاوتی وجود ندارد.

روش‌شناسی پژوهش

ما در صدد ارائه‌ی مدلی جدید برای قیمت گذاری اختیار معامله هستیم. از منظر هدف اجرا، این پژوهش ماهیتی بنیادی و کاربردی دارد (علی دلاور، ۱۳۷۳، صص ۱۱۰-۱۲۵). در بخش بنیادی، ارائه‌ی مدل متفاوت معادله‌ی بلک شولز بررسی شده و در حوزه‌ی کاربردی، امکان بهره‌گیری از این مدل و

1. Heston Stochastic Volatility Model

2. Longstaff FA & Schwartz ES

مقایسه آن با مدل اصلی بلک شولز به منظور استفاده در بازارهای مالی بررسی می گردد. جهت ارائه مدلی کاراتر، ضمن بهره گیری از روش نیکی وورو - اوواروف، امکان استفاده از این روش جدید را فراهم می نماییم. در ادامه با بکارگیری ابزارهایی همانند نرم افزارهای ماتیماتیکا^۱ و اسپاس اس^۲، امکان مقایسه ی نتایج فراهم می گردد. در حوزه ی نظری، متغیرهای قابل تعریف شامل ابزار مشتقه و اختیار معامله می باشند. اوراق مشتقه در مباحث مالی ابزاری هستند که ساختار پرداخت و ارزش آنها از ارزش دارایی پایه و شاخص های مربوطه نشأت می گیرند. اختیار معامله قراردادی قانونی است که توسط یک فروشنده به یک خریدار در ازای مبلغ معینی فروخته می شود. قراردادهای اختیار خرید^۳ و فروش^۴، به دارندگان این حق را می دهند تا دارایی را در تاریخی معین و به قیمت مشخصی خریداری و یا به فروش برسانند. در حوزه ی عملیاتی مفاهیم قابل تعریف عبارتند از:

معادله شرودینگر: معادله ای است که چگونگی تغییر حالت کوانتومی یک سامانه فیزیکی با زمان را توصیف می کند (الغیض، ۲۰۱۸، ص ۴۴۳).

معادله بلک شولز: برآوردی نظری از قیمت اختیارات سبک اروپایی است؛ (همتا و امرشی، ۲۰۱۳، صص ۱۰۰ - ۱۲۱)

روش نیکی وورو - اوواروف: بر اساس حل عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با توابع خاص بنا شده است؛

چند جمله ای لاگر: در ریاضیات، جواب های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ می باشند. (استیون لی، ۲۰۱۲، صص ۳۳۳ - ۳۶۰)

در خصوص گردآوری اطلاعات مربوط به ادبیات موضوع و پیشینه پژوهش از روش کتابخانه ای و جهت جمع آوری اطلاعات برای تأیید یا رد فرضیه های پژوهش از روش میدانی استفاده گردید. با لحاظ محدودیت استفاده از اوراق مشتقه در بازار ایران، فرابورس به عنوان جامعه آماری انتخاب و اطلاعات معامله های زعفران محدود به بازه زمانی ۱۳۹۶ لغایت ۱۳۹۸ به عنوان نمونه آماری در این مقاله لحاظ گردید. از منظر روش آماری، پژوهش حاضر از نوع استنباطی می باشد. (غلامرضا خاکی، ۱۳۹۰، صص ۹۰ - ۲۱۰)

1. Mathematica
2. SPSS
3. Call Option
4. Put Option
5. Hemantha, Amershi

تجزیه و تحلیل داده‌ها و آزمون فرضیه‌ها

سیرارائه‌ی مطالب در این قسمت، شامل چگونگی اثبات و ارائه‌ی معادله‌ی جدید بلک شولز و سپس آزمون فرضیه‌ها و پاسخگویی به سوالات پژوهش خواهد بود. معادله‌ی دیفرانسیل جزئی و اصلی بلک شولز به شرح معادله ۴ می‌باشد. (کریستوفرسن و جاکوب^۱، ۲۰۰۸، صص ۸-۱۵)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + rs \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^2 \partial^2 p}{2 \partial s^2} - \gamma p = 0 \quad (۴)$$

در این معادله p قیمت اختیار خرید، r نرخ بدون ریسک، s قیمت پایه دارایی، t زمان تا سررسید و δ انحراف معیار قیمت دارایی می‌باشند. (مادان^۲، ۲۰۰۸، صص ۹۷-۱۱۵) در ادامه‌ی حل معادله ۴ می‌توان بدین گونه رفتار کرد:

$$p = e^{(r-\gamma)(T-t)} f(s) N(d_1) - e^{-\gamma(T-t)} K N(d_2) \quad (۵)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}} \quad (۶)$$

$$d_1 = \frac{\left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r_f + \frac{\delta^2}{2}\right)t \right)}{\delta\sqrt{(T-t)}} \quad (۷)$$

$$d_2 = \frac{\left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r_f - \frac{\delta^2}{2}\right)t \right)}{\delta\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \delta\sqrt{T-t} \quad (۸)$$

با جایگذاری معادله ۵ در معادله ۴ ما بدست آوردیم:

$$N(d_1) e^{(T-t)(r-\gamma)} \left(2rf(s) - 2rsf'(s) - s^2\delta^2 f''(s) \right) = 0 \quad (۹)$$

بنابراین معادله مربوط به $f(s)$ بصورت معادله ۱۰ می‌باشد:

$$f''(s) + \frac{2r}{s^2\delta^2} f'(s) - \frac{2r}{s^2\delta^2} f(s) = 0 \quad (۱۰)$$

با معرفی تبدیلی به شرح معادله‌ی ۱۱:

$$f(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u(s) \quad (۱۱)$$

ما به معادله‌ای بر حسب u به صورت معادله ۱۲ دست یافتیم:

$$u'' - \frac{b}{s^2} u = 0 \quad (۱۲)$$

که در آن b برابر است با:

$$b = \frac{r^2 + r\delta^2}{\delta^4} \quad (۱۳)$$

اگر معادله ۱۲ را با روش پارامتری نیکی وورو - اوواروف حل کنیم؛ u به صورت معادله ۱۴ خواهد شد. (پی نوشت الف و ب)

$$u = s^{\frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}} \quad (14)$$

با جایگذاری معادله ۱۴ در معادله ۱۱، حالت های $f_1(s)$ و $f_2(s)$ به صورت معادله ۱۵ و ۱۶ خواهند بود:

$$f_1(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u_1(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} s^{-\frac{1 + \sqrt{1+4(r^2+r\delta^2)}}{\delta^4}} = s \quad (15)$$

$$f_2(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u_1(s) = s^{-\frac{2r}{\delta^2}} s^{-\frac{1 - \sqrt{1+4(r^2+r\delta^2)}}{\delta^4}} = s \quad (16)$$

ما فرم نهایی $f(s)$ را بصورت ترکیبی خطی از $f_1(s)$ و $f_2(s)$ ارائه کردیم.

$$f(s) = c_1 s^{-\frac{2r}{\delta^2}} + c_2 s. \quad (17)$$

ما پیشنهاد می دهیم که $c_1 = c_2 = 1$ است. با جایگذاری معادله ۱۷ در معادله ۴ داریم:

$$p = e^{(r-\gamma)(T-t)} \left(s^{-\frac{r}{\delta^2}} + s \right) N(d_1) - e^{-\gamma(T-t)} KN(d_2) \quad (18)$$

در این مقاله اطلاعات آخرین ۵۰ قرارداد اختیار معامله ی خرید زعفران در بورس کالای ایران منتهی به سال ۱۳۹۸ مورد استفاده قرار گرفت. در این راستا ابتدا، اطلاعات ورودی: شامل قیمت های پایه دارایی از ۱۴۴،۲۴۵ تا ۱۳۷،۳۱۵ ریال، انحراف معیار نوسان قیمت زعفران ۱۸ درصد، نرخ بازده بدون ریسک ۱۵ درصد، زمان تا سررسید ۰،۴ تا ۱ سال و قیمت اعمال از ۱۵۰،۰۰۰ تا ۱۸۰،۰۰۰ ریال در مدل جدید و مدل اصلی بلک شولز اعمال و سپس قیمت های خروجی حاصله، مورد مقایسه قرار گرفتند. نمودار یک تفاوت قیمت های محاسبه شده بر اساس مدل اصلی بلک شولز و مدل ارائه شده در این پژوهش را نشان می دهد.



نمودار ۱. تفاوت قیمت های حاصله بر اساس مدل اصلی بلک شولز و مدل پیشنهادی

در ادامه‌ی بررسی آماری پیرامون نتایج حاصله، ابتدا آزمون نرمال بودن (کولموگروف اسمیرنوف) قیمت‌های بدست آمده بر اساس دو مدل انجام و به شرح جدول شماره یک ارائه می‌گردند:

Table1. One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		VAR00001
N		50
Normal Parameters,a,b	Mean	1150.4971
	Std. Deviation	2461.30615
Most Extreme Differences	Absolute	.378
	Positive	.378
	Negative	-.320
Test Statistic		.378
Asymp. Sig. (2-tailed) .		.000

نتایج بدست آمده در جدول شماره یک، ($sig = 0 < 0.05$) نشان‌دهنده نرمال نبودن قیمت‌های حاصل از بکارگیری معادله استاندارد بلک شولز دارد. در ادامه، آزمون نرمال بودن قیمت‌های حاصل از بکارگیری مدل جدید اجرا و نتایج ارزیابی به شرح جدول شماره دو ارائه می‌گردند:

Table2. One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		VAR00002
N		50
Normal Parameters,a,b	Mean	1150.5749
	Std. Deviation	2461.42909
Most Extreme Differences	Absolute	.378
	Positive	.378
	Negative	-.320
Test Statistic		.378
Asymp. Sig. (2-tailed)		.000

نتایج بدست آمده در جدول شماره دو، ($sig = 0 < 0.05$) نشان‌دهنده نرمال نبودن قیمت‌های حاصل از بکارگیری معادله جدید دارد. بنابراین فرض نرمال بودن نتایج حاصل از بکارگیری مدل پیشنهادی در سطح اطمینان ۹۵ درصد قابل پذیرش نیست. با توجه به عدم پذیرش فرض نرمال بودن دو گروه مورد بررسی، آزمون ناپارامتریک من‌ویتنی جهت ارزیابی دو گروه انتخاب گردید. در ادامه، آزمون برابری واریانس‌های دو گروه ارزیابی به شرح جدول شماره سه ارائه می‌گردد:

Table3. Equivalence test for variances

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	.151	1	.151	.000	1.000
Within Groups	593716394.515	98	6058330.556		
Total	593716394.666	99			

با توجه به ($sig = 1 > 0.05$) فرض برابری واریانس‌ها در سطح اطمینان ۹۵ درصد مورد پذیرش قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از ارزیابی آزمون من‌ویتنی به شرح جدول شماره چهار می‌باشد:

Table4. Test Statisticsa

	VAR00003
Mann-Whitney U	1223.000
Wilcoxon W	2498.000
Z	-.186
Asymp. Sig. (2-tailed)	.852

با توجه به ($sig = 0.852 > 0.05$) در سطح اطمینان ۹۵ درصد فرضیه پژوهش که مبتنی بر عدم وجود اختلاف معنادر بین نتایج مدل اصلی بلک‌شولز و مدل پیشنهادی و تعمیم‌یافته است؛ مورد تأیید قرار می‌گیرد.

آزمون فرضیه‌ها

بین خروجی مدل جدید ارائه شده و مدل اصلی بلک‌شولز تفاوتی وجود ندارد. با استناد به نتایج حاصل از آزمون آماری ناپارمتریک من‌ویتنی بین مدل جدید و مدل اصلی بلک‌شولز، فرضیه این پژوهش در سطح اطمینان ۹۵ درصد مورد تأیید قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است؛ عدم معنادار بودن خروجی‌های حاصله به معنی تشابه دو مدل نیست. بلکه ما نشان دادیم که معادله‌ی جدید ضمن اثبات با روشی نوآورانه، تفاوت از لحاظ متغیرهای موثر بر آن و در نهایت شکل نهایی متفاوت با معادله اصلی بلک‌شولز، از لحاظ خروجی با معادله اصلی بلک‌شولز نزدیک است. ارائه‌ی معادله‌ای متفاوت با معادله اصلی بلک‌شولز و حصول نتایج (قیمت‌گذاری) نزدیک اما دقیق‌تر و با لحاظ محدودیت تعداد نمونه‌ی استفاده شده و در سطح اطمینان ۹۵ درصد، مزیت استفاده از روش جدید می‌باشند. تشابه مدل جدید با مدل بلک‌شولز توسط مدلسازی بوت‌استرپ نیز مورد تأیید قرار گرفته و تشریح آن در این مجال پرداخته نشده است.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

استفاده از مدل جدید برای قیمت‌گذاری صحیح‌تر اختیار معامله پیشنهاد می‌گردد. تحلیل‌گران مالی بویژه ارزشگذاران اختیار معامله، فعالان بازارهای سرمایه و مشاوران مالی که بدنبال محاسبه‌ی

قیمت اختیار معامله هستند؛ کاربران اصلی این مقاله می‌باشند. نتیجه‌ی حاصله مؤید آن است که ما با حل معادله‌ی شرودینگرگونه اصلی به روش نیکی وورو - اواروف، به فرمی صریح و جدید از معادله‌ی قیمت گذاری اختیار معامله دست یافتیم. در واقع مدل اصلی بلک شولز یکی از حالت‌های خاص مدل بهبود یافته پیشنهادی می‌باشد. لذا برتری استفاده از مدل پیشنهادی نسبت به مدل اصلی قابل درک می‌باشد. یافته‌ی دیگر بیانگر آن است که نتایج قیمت گذاری بر اساس معادله‌ی جدید به قیمت حاصله بر مبنای روش بلک شولز نزدیک بوده و این تفاوت در مقادیر بالای معامله‌های اختیار معامله پررنگ خواهد بود. ما با بهبود مدل قیمت گذاری بلک شولز از این طریق، امکان استفاده از معادله‌ی جدید جهت قیمت گذاری صحیح‌تر قراردادهای اختیار معامله، را فراهم کردیم. در واقع، مزیت اصلی ارائه‌ی این روش شامل بهره‌گیری از روشی جدید و متفاوت برای اثبات معادله‌ی بلک-شولز، دقت بیشتر قیمت گذاری برای مقادیر بالای معامله‌های اختیار، امکان بکارگیری از معادله‌ی جدید برای قیمت گذاری انواع گوناگون اوراق اختیار معامله همانند اوراق آمریکایی و در نهایت اعمال محدودیت‌های کمتر جهت اثبات معادله استوار می‌باشد.

نتایج این پژوهش با نتایج پژوهش ماتیو استارم، توماس هانگیتون و داگلاس (۲۰۱۷) که نشان دادند نسخه اصلاح شده از فرمول قیمت گذاری اختیار معامله بلک شولز، به طور گسترده‌ای در حوزه مالی قابلیت استفاده دارند؛ همخوان می‌باشد. همچنین ارائه‌ی معادله‌ی متفاوت بلک شولز صورت گرفته در این پژوهش، نتایج پژوهش وی‌ال خاستکوویچ^۱ (۲۰۱۵) را تأیید می‌نماید. نتایج صورت پذیرفته با انتخاب و تعدیل متغیرهای ورودی واقعی‌تر و با رویکرد الغلیص (۲۰۱۸) برای قیمت گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی مطابقت دارد. اگر چه نتایج این پژوهش نشان‌دهنده‌ی عدم وجود تفاوت معنادار بین خروجی مدل اصلی و مدل جدید می‌باشد؛ ولیکن دو نکته پیرامون آن حائز اهمیت است. اولاً، این عدم تفاوت می‌تواند نشان‌دهنده‌ی اعتبار مدل جدید باشد. همانطور که مدل اصلی بلک شولز دارای وجاهت علمی در بین متخصصان مالی بوده، خروجی یک معادله جدید که تفاوت معناداری با قیمت گذاری مدل اصلی استاندارد ندارد، می‌تواند به اعتبار مدل جدید کمک نماید. ثانیاً، علی‌الرغم وجود تفاوت بسیار جزئی، این تفاوت در مبالغ بالای معامله‌های اختیار بین‌المللی (برای مثال چند صد میلیون دلار و بالاتر) اهمیت بیشتری خواهد داشت. می‌توان ادعا نمود که برتری استفاده از مدل جدید در مقایسه با مدل اصلی اهمیت دو چندانی پیدا نموده و با افزوده شدن ارزش معامله‌ی پایه اختیار، اهمیت این تفاوت بیشتر خواهد بود.

1. V. L. Khatskevich

منابع

- خلیلی عراقی مریم و همکاران. (۱۳۹۵). "قیمت گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون". پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علوم تحقیقات تهران، صص ۳۰ - ۸۰.
- جلوداری ممقانی پیکر. (۱۳۹۱). "محاسبه ارزش اختیار به روش گیلز". پژوهش نامه اقتصادی، تهران، صص ۸-۱۵.
- خضری پور قرایی، رشید ستار دباغی، صفا و قاسمی. (۱۳۹۱). "یک مقایسه از روش های شبیه سازی مونت کارلو و تفاضلات متناهی در ارزش گذاری اختیار معاملات توأم با مانع دوتایی در حالت گسسته". سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، تهران، صص ۱۲ - ۲۱.
- سروستانی سلیمانی. ابراهیمی. (۱۳۹۱). "روش درخت دوجمله ای برای قیمت گذاری اختیارات آسیایی در مدل پرش". سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها. تهران. صص ۸-۱۳.
- خاکی غلامرضا. (۱۳۹۱). "روش پژوهش با رویکردی به پایان نامه نویسی". تهران، انتشارات بازتاب چاپ سوم.
- هال جان. (۱۳۸۸). "مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک". ترجمه سجاد سیاح و علی صالح آبادی، تهران، چاپ دوم، شرکت کارگزاری مفید.
- دلاور علی. (۱۳۷۳). "روش های پژوهش در روان شناسی و علوم تربیتی". تهران، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور، چاپ پنجم.
- Alghalith, M. (2018). Pricing the American options using the Black-Scholes pricing formula. *Physica A*, 443 -450.
- Sturm, Matthew., Goldstein, Henry. Huntington, Thomas. (2017). Using the pricing model approach to assess strategic decisions in turbulent environments: Black Scholes and airborne changes. *Climatic Change*, 2, 437-449.
- Ivanov, Roman. (2015). The maximum gamma-ray variance distribution process and the pricing path of the options. *European Finance*, 2, 979-993.
- Alghalith, Moawia. (2014). Pricing options: A very simple formula. *Dorsoduro*, 20(2), 71-73.
- Kumar, S., Kumar, D., & Singh, J. (۲۰۱۴). Numerical computation of fractional Black-Scholes equation arising in financial market. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1(3-4), 177-183.
- Hemantha, Amershi. (2013). Pricing the option of expanding crack with capsules". *European Finance*. 37(1), 100-121.
- Kumar, Vipul. (2013). Experimental competition in pricing options. *School of Management*, Volume, 19(2), 129-156.
- Li, S. (2012). The implicit cost of interactions by the pricing model of Ielend's powers. *Mathematical sciences*, 18(4), 333-360.
- Jean-Pierre, P., Tashman, Adam. (2012). Option pricing under the beta stress model. *Semantic Scholar*, 183-20.

- Meng, Li., Wang, Mei. (2010). Comparison of the Beckhelsell formula with the frequency Black-Scholes formula in the exchange derivatives market by changing the oscillation. *Basic and Applied Sciences*, 99-111.
- Ahn, J., Kang, S., & Kwon, Y. H. (2010). A Laplace transform finite difference method for the Black-Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, volum 5, 247-255.
- Bohner, M., & Zheng, Y. (2009). On analytical solutions of the Black-Scholes equation. *Applied Mathematics Letters*, 22(3), 309-313.
- Madan, mark. (2008). Combination of Black Schulz formulas with Brownian motion and limited connections. *Applied Mathematics*, 15(2), 97-115.
- Broadie, mark., Jain, Ashish. (2008). Key variables fluctuations in pricing models of transaction options and risk management. *Economics and Organization*, 7(4), 7-24.
- Christoffersen, peter., Jacobs, kris., Ornthanalai, Chayawat. (2008). Option Valuation with Long-Run and Short-Run Volatility Components. *Journal of Financial Economics*, Vol. 90, No. 3, pp. 272-297
- Chen, Xu., Wan, Jian-ping. (2007). Pricing options to change the route of the Levy model under the MEM. *Mathematical Statistics*, 23(4), 651-664.
- Olga, Shishkina. (2007). the approximation of solutions and derivatives to the Black-Scholes equation doubles with unhealthy initial data. *Engineering Sciences*, 47(3), 442-462.
- Christoffersen, Jacobs and Ornthanalai. (2008). "Determine the price of the transaction option with the short-term and long-term volatility components". *A Profesional development*, PP 8-15.
- Xu Chen. Jian-ping Wan. (2007). "Pricing options to change the route of the Levy model under the MEM". *Mathematical Statistics*, vol 23, issue 4, pp 651 -664.
- S. LiG. I. ShishkinL. P. Shishkina. (2007). "The approximation of solutions and derivatives to the Black-Scholes equation doubles with unhealthy initial data". *Engineering Sciences*, Volume 47, Issue 3, pp 442-462.

COPYRIGHTS



This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license.