

Geometric Asian Rainbow Option on the Iranian Stock Market¹

Mohammad Reza Ahmadi ², Neda Esmaeeli ³

Received: 2023/04/22

Accepted: 2023/09/22

Research Paper

Abstract

In this paper, we study a new kind of exotic option called geometric Asian rainbow option on the Iranian stock market. At first, we choose two stocks from the Iranian stock market. Next, we present the price for the two-asset geometric Asian rainbow option under fractional Brownian motion. Then, our sensitivity analysis of the model parameters will be investigated. The results of this research confirm that the geometric Asian rainbow option has a cheaper price than other traditional options including European, American, and even some types of Asian options, and can work better in risk management of financial portfolios.

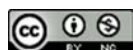
Key Words: Asian Option, Rainbow Option, Fractional Brownian Motion.

JEL Classification: G12, G13.

1. doi: 10.22034/JSE.2023.11852.1906

2. M.Sc. student, Financial mathematics, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, Isfahan, Iran. Email: ahmadi_448@yahoo.com.

3. Assistant Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, Isfahan, Iran. (Corresponding Author). Email: n.esmaeeli@sci.ui.ac.ir.



Copyright © 2023 The Authors. Published by Securities and Exchange Organization. This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>). Non-commercial uses of the work are permitted, provided the original work is properly cited.



سازمان بورس و اوراق بهادار، مرکز پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی

فصلنامه بورس اوراق بهادار، سال شانزدهم، شماره ۶۳، پاییز ۱۴۰۲، صص ۱۶۸-۱۴۹

اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی در بازار بورس و اوراق بهادار ایران^۱

محمد رضا احمدی^۲، ندا اسماعیلی^۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۳۱

مقاله پژوهشی

چکیده

در این مقاله به بررسی یک اختیار معامله خارجی جدید تحت عنوان اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی در بازار بورس و اوراق بهادار ایران می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا دو سهم از بازار سهام ایران انتخاب می‌کنیم. سپس قیمت اختیار معامله یاد شده را برای این دو سهم که دینامیک آن‌ها از حرکت براونی کسری پیروی می‌کند، به دست می‌آوریم. در گام بعد تاثیر پارامترهای مختلف مدل را بر روی قیمت اختیار معامله‌ی مورد نظر می‌سنجیم. نتایج این پژوهش تایید می‌کند که اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی نسبت به سایر اختیار معامله‌های سنتی از جمله اختیار معامله‌های اروپایی، آمریکایی و حتی برخی از انواع اختیار معامله‌های آسیایی از قیمت کم‌تری برخوردار است و می‌تواند در کنترل و مدیریت ریسک سبدهای مالی بهتر عمل کند.

واژه های کلیدی: اختیار معامله آسیایی، اختیار معامله رنگین کمانی، حرکت براونی کسری.

طبقه بندی موضوعی: G12 , G13.

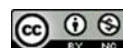
doi: 10.22034/JSE.2023.11852.1906

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد، رشته ریاضی مالی، گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران. (ahmadi_448@yahoo.com)

۳. استادیار، گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران. (نویسنده مسئول). (n.esmaeeli@sci.ui.ac.ir)

حق انتشار این مستند، متعلق به نویسندگان آن است. © ۱۴۰۲. ناشر این مقاله، سازمان بورس و اوراق بهادار است.

این مقاله تحت گواهی زیر منتشر شده و هر نوع استفاده غیرتجاری از آن مشروط بر استناد صحیح به مقاله و با رعایت شرایط مندرج در آدرس زیر مجاز است.



Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International license
(https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

مقدمه

در سال‌های اخیر، تغییرات پی در پی در بازارهای مالی پایه با افزایش ریسک سرمایه‌گذاری در بازار ابزارهای مشتقه همراه بوده است. در دوره‌هایی که بازار مالی پایه دارای تلاطم است، این نوع سرمایه‌گذاری منجر به ضررهای بالقوه بزرگی می‌شود که نمونه آن را می‌توان در ماجرای ورشکستگی بانک سرمایه‌گذاری برادران لمان^۱ مشاهده کرد. برخی از کارشناسان علت ورشکستگی این بانک را استفاده آن‌ها از ابزارهای مشتقه می‌دانند، زیرا زمانی که این بانک اعلام ورشکستگی کرد برپایه گزارش‌ها تقریباً ۹۳۰ هزار قرارداد مربوط به انواع ابزارهای مشتقه را در اختیار داشت. ارزش این قراردادها بالغ بر ۳۵ تریلیون دلار بود که این مبلغ تاحدودی ۵ درصد از کل معاملات ابزارهای مشتقه در جهان را در برمی‌گرفت. در مجموع مالکیت این حجم از ابزارهای مشتقه و رشد بازار مربوط به آن‌ها منجر به افزایش ریسک و همچنین ضعف‌های سیستماتیک شد و همین امر سبب شد بانک لمان بیشتر مشتری‌های خود را از دست بدهد و در شرایط بحرانی قرار بگیرد. قیمت سهام این بانک پس از خروج بیشتر مشتری‌هایش از اوراق مشتقه، با سقوط سنگینی همراه بود که در نهایت منجر به اعلام ورشکستگی از سوی این بانک شد که بزرگ‌ترین نمونه ورشکستگی در دنیا است (سامه^۲، ۲۰۱۲). از این رو می‌توان نتیجه گرفت که ابزارهای مشتقه مرسوم، تحت شرایطی ممکن است با ریسک‌های بزرگی همراه شوند و ضررهای جبران‌ناپذیری را به وجود آورند. برای اجتناب از این وضعیت باید تا جایی که امکان دارد از ابزارهای مشتقه‌ای استفاده کنیم که در مدیریت ریسک مفید واقع می‌شوند و سرمایه‌گذاران را با ریسک کم‌تری روبرو می‌کنند. بنابراین در این مقاله به بررسی یک اختیار معامله جدید تحت عنوان اختیار معامله رنگین‌کمانی آسیایی هندسی در بازار سهام ایران می‌پردازیم که دارای ریسک پایین‌تر و قیمت کم‌تری نسبت به انواع سنتی اختیار معامله‌ها مانند اروپایی، آمریکایی و آسیایی است و می‌تواند به طور وسیعی در مدیریت ریسک به کار گرفته شود. بخش‌بندی مطالب این مقاله به قرار زیر است: در بخش ۲ برخی مفاهیم اولیه مورد نیاز را مرور می‌کنیم. در بخش ۳ به معرفی اختیار معامله رنگین‌کمانی آسیایی هندسی می‌پردازیم و فرمول محاسبه قیمت آن را ارائه می‌کنیم. در بخش ۴ به محاسبه قیمت این اختیار معامله در بازار سهام ایران می‌پردازیم. برای این منظور دو سهم از بازار سهام ایران انتخاب می‌کنیم و قیمت

1. Lehman Brothers

2. Summe

اختیار معامله یاد شده را برای آن‌ها به دست می‌آوریم. در گام بعد تاثیر پارامترهای مختلف مدل را بر روی قیمت اختیار معامله‌ی مورد نظر می‌سنجیم. سرانجام نشان می‌دهیم که این اختیار معامله عملکرد بهتری نسبت به سایر اختیار معامله‌های سنتی در مباحث مدیریت ریسک دارد و از قیمت کم‌تری نیز برخوردار است. در پایان در بخش ۵ نتیجه‌گیری مدل مورد بررسی ارایه می‌شود.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱. اختیار معامله آسیایی

اختیار معامله‌های آسیایی یکی از انواع اختیار معامله‌های خارجی^۱ محسوب می‌شوند که از محبوبیت زیادی در بین سرمایه‌گذاران برخوردارند. این نوع اختیار معامله برای نخستین بار در سال ۱۹۸۷ توسط دو متخصص بانکی برای قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله مربوط به نفت خام مورد استفاده قرار گرفت و از آنجایی که این دو نفر در آن زمان در شهر توکیو حضور و فعالیت داشتند، این نوع اختیار معامله‌ها را اختیار معامله‌های آسیایی نام‌گذاری کردند (ویلموت^۲، ۲۰۱۳). اختیار معامله آسیایی که اختیار معامله میانگین^۳ نیز نامیده می‌شود، یکی از انواع اختیار معامله‌ها است که تابع عایدی آن وابسته به میانگین قیمت‌های دارایی پایه در یک بازه‌ی زمانی مشخص است. در این نوع اختیار معامله به سبب نوع تابع عایدی تاثیر دست‌کاری قیمت در بازار (موقعیت‌های آربیتراژ) کاهش می‌یابد و هم‌چنین از آنجایی که نوسانات ایجاد شده در بازار، تاثیر کم‌تری روی میانگین قیمت دارایی‌های پایه نسبت به قیمت خود دارایی‌ها دارد، در مدیریت ریسک نیز مفید واقع می‌شوند و می‌توانند تا حد زیادی سرمایه‌گذاران را در برابر ریسک ناشی از تلاطم‌های آنی قیمت در بازار پوشش دهند. همین ویژگی‌ها باعث شده که این اختیار معامله‌ها نسبت به اختیار معامله‌های اروپایی و آمریکایی همتای خود از قیمت کم‌تری برخوردار باشند. اختیار معامله‌های آسیایی بر اساس روش میانگین‌گیری در تابع عایدیشان به دو دسته حسابی و هندسی تقسیم می‌شوند. نوع دیگری از دسته‌بندی این اختیار معامله‌ها بر اساس تعداد قیمت‌های دارایی پایه‌ای است که قرار است از آن‌ها میانگین گرفته شود. بر این اساس، اختیار معامله‌هایی که میانگین آن‌ها در یک بازه زمانی به تعداد شمارا از قیمت‌های دارایی پایه وابسته است، اختیار معامله آسیایی گسسته^۴ و به آن‌هایی که میانگین

1. Exotic options

2. Wilmott

3. Average option

4. Discrete Asian option

شان در یک بازه زمانی به تعداد ناشمارایی از قیمت‌های دارایی‌های پایه وابسته است، اختیار معامله آسیایی پیوسته^۱ گفته می‌شود. در دنیای واقعی معمولاً فقط اختیار معامله‌های آسیایی گسسته معامله می‌شوند در حالی که در مقالات و پژوهش‌ها، بیش‌تر اختیار معامله‌های آسیایی پیوسته مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هم‌چنین در مقالات و پژوهش‌ها از میانگین هندسی به مراتب بیش‌تر از میانگین حسابی استفاده می‌شود (هال^۲، ۲۰۱۲، ژانگ^۳، ۱۹۹۸). کمنا^۴ و ورست^۵ (کمنا و ورست، ۱۹۹۰) از نخستین افرادی بودند که جواب فرم-بسته‌ای برای اختیار معامله‌های آسیایی هندسی به دست آوردند.

۲. اختیار معامله رنگین کمانی

مبحث اختیار معامله‌های رنگین کمانی^۶ برای اولین بار توسط مارگریب^۷ (مارگریب، ۱۹۷۸) مطرح شد و به سرعت به یکی از مهم‌ترین انواع اختیار معامله‌های خارجی مبدل شد. در واقع مارگریب نوعی اختیار معامله را معرفی کرد که امروزه با عنوان اختیار معامله مارگریب یا اختیار معامله مبادله^۸ شناخته می‌شود و سپس با استفاده از مدل بلک-شولز به قیمت‌گذاری آن پرداخت. در این نوع اختیار معامله، دارنده اختیار معامله حق دارد در زمان سررسید یک دارایی پایه را با یک دارایی پایه دیگر مبادله کند. به‌طور کلی اختیار معامله‌های رنگین کمانی به همه اختیار معامله‌هایی اشاره دارد که عایدی آن‌ها به بیش از یک دارایی پایه بستگی دارد. رابینشتین^۹ (رابینشتین، ۱۹۹۱) نخستین کسی بود که نام رنگین کمان را روی این نوع از اختیار معامله‌ها گذاشت و علت انتخاب این نام را این‌طور بیان کرد که این نوع اختیار معامله‌ها همانند رنگین کمان که ترکیبی از رنگ‌های مختلف است، ترکیبی از دارایی‌های پایه مختلف است. بنابراین در این نوع اختیار معامله‌ها با سبدهای مختلفی از دارایی‌های مختلف با ریسک و بازده‌های مختلف روبه‌رو هستیم و در نتیجه این نوع اختیار معامله‌ها نسبت به سایرین انعطاف بیش‌تری دارند و ابزارهای بسیار مناسبی برای پوشش ریسک سرمایه‌گذاری به شمار می‌آیند. افزون بر این، این

-
1. Continuous Asian option
 2. Hull
 3. Zhang
 4. Kemna
 5. Vorst
 6. Rainbow options
 7. Margrabe
 8. Exchange option
 9. Rubinstein

اختیار معامله‌ها تابع دو یا تعداد بیش‌تری عامل تصادفی هستند، در صورتی که سایر اختیار معامله‌های سنتی فقط تابع یک عامل تصادفی هستند (به عنوان مثال قیمت دارایی پایه). این ویژگی سبب می‌شود که برای ارزش‌گذاری دارایی‌های پایه‌ای که به دو یا چند عامل تصادفی بستگی دارند، از آن‌ها استفاده شود. به عنوان مثال برای ارزش‌گذاری منابع طبیعی از این نوع اختیار معامله‌ها استفاده می‌شود زیرا ارزش‌گذاری منابع طبیعی به دو عامل تصادفی قیمت و مقدار این منابع بستگی دارد. همین ویژگی‌ها باعث شده است که این اختیار معامله‌ها به گزینه‌های جذابی برای سرمایه‌گذاران به خصوص سرمایه‌گذاران نهادی تبدیل شوند. امروزه این اختیار معامله‌ها انواع مختلفی دارند که بر اساس تمایل و نیاز مشتریان تعریف شده‌اند (اووه‌ند^۱ و وست^۲، ۲۰۰۸، ژانگ^۳، ۱۹۹۸).

ارایه مدل

۱. اختیار معامله رنگین کمائی آسیایی هندسی

با ترکیب دو اختیار معامله آسیایی و رنگین کمائی، اختیار معامله جدیدی با عنوان اختیار معامله رنگین کمائی آسیایی به وجود می‌آید که در مدیریت ریسک قدرتمندتر از اختیار معامله‌های آسیایی و رنگین کمائی عمل می‌کند. زیرا در این نوع اختیار معامله با سببی از دارایی‌های مختلف روبه‌رو هستیم (سرمایه موجود را به جای یک دارایی بر روی چند دارایی مختلف با ریسک و بازده‌های متفاوت سرمایه‌گذاری می‌کنیم) و در ضمن تابع عایدی آن بر اساس میانگین قیمت دارایی‌های پایه درون سبد در یک بازه‌ی زمانی مشخص محاسبه می‌شود.

۲. حرکت براونی کسری

حرکت براونی کسری^۳ برای اولین بار توسط کلموگروف^۴ (کلموگروف، ۱۹۴۰) معرفی و با نام مارپیچ وینر^۵ شناخته شد. پس از کلموگروف، افراد دیگری مانند هانت^۶ (هانت، ۱۹۵۱) و لوی^۷ (لوی، ۱۹۵۳) نیز پژوهش‌هایی را در مورد حرکت براونی کسری انجام دادند اما می‌توان گفت موثرترین

1. Ouwehand
2. West
3. Fractional Brownian motion
4. Kolmogorov
5. Wiener
6. Hunt
7. Levy

فعالیت در مورد این حرکت توسط مندلبروت^۱ و ون نس^۲ (مندلبروت و ون نس، ۱۹۶۸) صورت گرفت. آن‌ها حرکت براونی کسری را به عنوان انتگرال کسری حرکت براونی استاندارد معرفی کردند که به همین خاطر حرکت براونی کسری نام گذاری شد. هم چنین معرفی نماد H برای توصیف پارامتر موجود در حرکت براونی کسری نیز توسط مندلبروت و ون نس معرفی شد. پارامتر H به پاس تلاش‌هایی که هرست^۳ (هرست، ۱۹۵۱) در راستای شناسایی این حرکت انجام داد، به پارامتر هرست (توان هرست) نام گذاری شد. لازم به بیان است که این پارامتر با عنوان پارامتر یا شاخص خودمشباهی^۴ نیز شناخته می‌شود. برای تعریف حرکت براونی کسری معمولاً از دو روش زیر استفاده می‌شود:

تعریف حرکت براونی کسری از طریق نمایش انتگرال تصادفی

تعریف ارایه شده توسط مندلبروت و ون نس برای حرکت براونی کسری $(B_t^H)_{t \geq 0}$ عبارت است از (نوروس^۵، والکیلا^۶ و ویرتامو^۷، ۱۹۹۹): $B_0^H = 0$ و

$$B_t^H = c_H \int_{-\infty}^0 \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s$$

که $(B_s)_{s \geq 0}$ حرکت براونی استاندارد و c_H یک ثابت نرمال است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+H\right)\Gamma(2-2H)}}$$

امروزه در بسیاری از مقالات و پژوهش‌ها، استفاده چندانی از نمایش انتگرالی حرکت براونی کسری نمی‌شود بلکه این فرایند همانند حرکت براونی استاندارد با استفاده از خواص کوواریانس مربوط به آن تعریف می‌شود.

تعریف حرکت براونی کسری به وسیله تابع کوواریانس

حرکت براونی کسری $(B_t^H)_{t \geq 0}$ ، یک فرایند گاوسی مرکزی و پیوسته با میانگین صفر است که تابع کوواریانس آن به صورت زیر تعریف می‌شود (نولارت^۸، ۲۰۰۶):

1. Mandelbrot
2. Van Ness
3. Hurst
4. Self-similarity
5. Norros
6. Valkeila
7. Virtamo
8. Nualart

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad 0 \leq s, t.$$

پارامتر هرست میزان ناهمواری مسیر را نشان می‌دهد و هر چه مقدار این پارامتر بیش تر باشد، نمودار مسیر حرکت براونی کسری هموارتر خواهد بود. حرکت براونی کسری را بر اساس مقادیر پارامتر هرست می‌توان به سه دسته مختلف $H > \frac{1}{2}$ ، $H = \frac{1}{2}$ و $H < \frac{1}{2}$ تقسیم کرد. هرگاه $\frac{1}{2} < H < 1$ ، حرکت براونی کسری دارای وابستگی بلندمدت^۱ است و برای $0 < H < \frac{1}{2}$ ، دارای وابستگی کوتاه مدت^۲ است. برای $H = \frac{1}{2}$ ، حرکت براونی کسری به حرکت براونی استاندارد تبدیل می‌شود و در این حالت وابستگی ندارد.

۳. معرفی مدل

برای قیمت گذاری اختیار معامله های رنگین کمانی آسیایی هندسی در چارچوب مدل بلک-شولز که دارایی های پایه ی آنها از حرکت براونی هندسی پیروی می کنند، پژوهش های متعددی صورت گرفته است که از جمله آنها می توان به پژوهش های پنگ بین^۳ و پنگ فی^۴ (بین و فی، ۲۰۰۹) و هیورونگ ژان^۵ و چان شنگ چنگ^۶ (ژان و چنگ، ۲۰۱۰) اشاره کرد. در پژوهش های بیان شده فرمول های فرم-بسته ای برای این نوع اختیار معامله ها بر اساس حرکت براونی هندسی به دست آمده است. در این مقاله ما قصد داریم بنابر دلایلی که در ادامه به آنها اشاره می کنیم، فرمولی فرم-بسته برای قیمت گذاری اختیار خرید های رنگین کمانی آسیایی هندسی شامل دو دارایی پایه بر اساس حرکت براونی کسری ارائه دهیم. دلیل این جایگزینی عبارت است از این که شواهد تجربی نشان می دهد که در موارد متعددی شاخص بازار سهام دارای حافظه بلندمدت است و به همین دلیل نباید توسط فرایندهای نیم مارتینگال^۷ مانند حرکت براونی استاندارد که نمو های مستقل و مانا دارند و هم چنین فاقد حافظه هستند، توصیف شود. در بازار بورس و اوراق بهادار ایران نیز پژوهش هایی در این رابطه صورت گرفته است که وجود حافظه

1. Long-range dependence

2. Short-range dependence

3. Peng Bin

4. Peng Fei

5. Huirong Zhan

6. Qiansheng Cheng

7. Semimartingale

بلندمدت در شاخص بازار بورس ایران را تایید می‌کند. از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به نیکومرام، سعیدی و عنبرستانی (نیکومرام، سعیدی و عنبرستانی، ۱۳۹۰)، صالحی و زمانی مقدم (صالحی و زمانی مقدم، ۱۳۹۳)، موسوی شیر، وقفی و آهنگری (موسوی شیر، وقفی و آهنگری ۱۳۹۲) و هم‌چنین شعرایی و ثنایی اعلم (شعرایی و ثنایی اعلم، ۱۳۸۹) به عنوان نمونه اشاره کرد. در واقع بی‌حافظه‌گی یکی از ضعف‌های اساسی حرکت براونی استاندارد است که زمینه را برای مدل‌سازی قیمت‌های دارای حافظه توسط حرکت براونی کسری مهیا می‌سازد. حرکت براونی کسری فرایندی با ویژگی‌های خودمتشابهی و وابستگی بلندمدت است. از این‌رو دانشمندان در قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ها توجه ویژه‌ای به این فرایند دارند، به گونه‌ای که راجرز^۱ (راجرز، ۱۹۹۷) بیان می‌کند: «ویژگی‌های خودمتشابهی و وابستگی بلندمدت حرکت براونی کسری باعث می‌شود که این حرکت برای توصیف دینامیک دارایی‌های مالی نسبت به حرکت براونی هندسی مناسب‌تر باشد». از سوی دیگر، با توجه به این که حرکت براونی کسری تعمیمی از حرکت براونی است، در مواردی که فرایند قیمت بی‌حافظه است، می‌توان با مقداردهی مناسب به پارامتر هرست در این فرایند ($H = 0.5$)، مدل به کار گرفته شده را به مدل مبتنی بر حرکت براونی استاندارد تبدیل کرد. از این‌رو استفاده از حرکت براونی کسری در مدل‌سازی دینامیک قیمت دارایی‌های پایه آزادی عمل بیش‌تری به ما می‌دهد. حال با این مقدمه، به منظور قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های رنگین‌کمانی آسیایی هندسی، دو دارایی پایه با فرایندهای قیمت S_1 و S_2 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (وانگ^۲، ژانگ^۳، یانگ^۴ و ما^۵، ۲۰۱۸):

$$\begin{cases} dS_1 = \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dB_{1t}^H, \\ dS_2 = \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dB_{2t}^H, \end{cases}$$

-
1. Rogers
 2. Wang
 3. Yang
 4. Su
 5. Ma

که به ترتیب μ_1 و μ_2 نرخ بازده مورد انتظار^۱ و σ_1 و σ_2 تلاطم^۲ قیمت دارایی‌های پایه S_1 و S_2 است و ρ ضریب هم‌بستگی^۳ بین دو حرکت براونی کسری dB_{1t}^H و dB_{2t}^H است. هم‌چنین به ازای هر $s \in [0, t]$ ، $I_i(t) = \int_0^t \ln S_i(s) ds$ ، $(i = 1, 2)$ ، حال با توجه به تعریف بالا، میانگین هندسی قیمت دارایی پایه در بازه $[0, t]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$G_i(t) = e^{\frac{1}{t} \int_0^t \ln S_i(s) ds} = e^{\frac{I_i}{t}}, \quad i = 1, 2$$

در این صورت تابع عایدی اختیار معامله رنگین کمائی آسیایی هندسی شامل دو دارایی پایه‌ی S_1 و S_2 بر اساس متغیرهای I_1 و I_2 و هم‌چنین قیمت اعمال K ، به صورت $\phi(S_1, S_2, I_1, I_2, t) = \max(\min(G_1(t), G_2(t)) - K, 0)$ تعریف می‌شود. هم‌چنین قیمت اختیار خرید رنگین کمائی آسیایی هندسی شامل دو دارایی پایه بر اساس حرکت براونی کسری به صورت زیر تعیین می‌شود.

قضیه: اگر فرض کنیم $V(t)$ تابع قیمت اختیار معامله رنگین کمائی آسیایی هندسی در لحظه t باشد که به پارامترهای S_1 ، S_2 ، I_1 و I_2 وابسته است. در این صورت فرمول قیمت گذاری اختیار خریدهای رنگین کمائی آسیایی هندسی شامل دو دارایی پایه با استفاده از حرکت براونی کسری به فرم زیر خواهد بود (وانگ و همکاران، ۲۰۱۸):

$$\begin{aligned} V(S_1, S_2, I_1, I_2, t) &= S_1^* e^{-r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma_1^{*2}\tau} N_2 \left(\frac{\ln\left(\frac{S_1^*}{K}\right) + \sigma_1^{*2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_1^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \frac{\ln\left(\frac{S_2^*}{S_1^*}\right) + (\rho\sigma_1^*\sigma_2^* - \sigma_1^{*2})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_{12}^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \frac{\rho\sigma_2^* - \sigma_1^*}{\sigma_{12}^*} \right) \\ &+ S_2^* e^{-r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma_2^{*2}\tau} N_2 \left(\frac{\ln\left(\frac{S_2^*}{K}\right) + \sigma_2^{*2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_2^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \frac{\ln\left(\frac{S_1^*}{S_2^*}\right) + (\rho\sigma_1^*\sigma_2^* - \sigma_2^{*2})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_{12}^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \frac{\rho\sigma_1^* - \sigma_2^*}{\sigma_{12}^*} \right) \\ &- K e^{-r(T-t)} N_2 \left(\frac{\ln\left(\frac{S_1^*}{K}\right)}{\sigma_1^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \frac{\ln\left(\frac{S_2^*}{K}\right)}{\sigma_2^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \rho \right). \end{aligned} \quad (1)$$

-
1. Expected rate of return
 2. Volatility
 3. Correlation coefficient

به طور خاص زمانی که $t = 0$ ، داریم:

$$S_i^* = \exp \left(\ln S_i(0) + \frac{rT}{2} + \frac{H\sigma_i^2 T^{2H}}{2H+1} - \frac{T^{2H}\sigma_i^2}{2} \right), \quad (i = 1, 2)$$

$$\sigma_i^* = \sigma_i \sqrt{1 - \frac{4H}{2H+1} + \frac{H}{H+1}}, \quad (i = 1, 2, 12)$$

که در روابط یادشده

$$\sigma_{12} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

و $N_2(\alpha, \beta; \theta)$ ، تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد دو متغیره با حدود بالایی انتگرال گیری α و β

و ضریب هم بستگی θ است. هم چنین در فرمول (۱)، پارامتر τ از طریق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\tau = \frac{2H}{T^2} \left(\frac{T^{2H} - t^{2H}}{2H} T^2 - 2T \frac{T^{2H+1} - t^{2H+1}}{2H+1} + \frac{T^{2H+2} - t^{2H+2}}{2H+2} \right)$$

برآورد مدل و تحلیل نتایج

۱. انتخاب دو سهم از بازار سهام ایران

در این مقاله قصد داریم در گام اول قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی را برای دو سهم منتخب از بازار سهام ایران به کمک حرکت براونی کسری به دست آوریم. بدین منظور دو سهم وبملت و شتران را از بازار سهام ایران انتخاب کردیم که سهم اول مربوط به بانک ملت و سهم دوم نیز مربوط به شرکت پالایش نفت تهران است.

طبق پژوهش هایی که پیش تر توسط صالحی و همکاران (صالحی و همکاران، ۱۳۹۳) انجام شده، وجود وابستگی بلندمدت در سری بازده شاخص های بانک و فراورده های نفتی به اثبات رسیده است. هم چنین با توجه به تحقیقات انجام شده توسط خواجهی و عبدی طالب بیگی (خواجهی و عبدی طالب بیگی، ۱۳۹۵)، رهنمای رودپشتی و پدرام (رهنمای رودپشتی و پدرام، ۱۳۹۱) و عبدالملکی، حمیدیان و باغانی (عبدالملکی، حمیدیان و باغانی، ۱۳۹۹) می توان دید که در قیمت و بازده سهام شرکت های بورس اوراق بهادار تهران، خاصیت فراکتالی وجود دارد و یکی از ویژگی های مهم فراکتال ها خاصیت خودم شباهتی آنها است. بنابراین، بر اساس

پژوهش‌های یادشده می‌توان نتیجه گرفت که در نظر گرفتن حرکت براونی کسری در توصیف دینامیک سهم‌ها منطقی به نظر می‌رسد. لازم به توضیح است که در بازار مشتقه ایران برای هر دو سهم انتخاب شده، اختیار معامله اروپایی با شرایط زیر وجود دارد:

۱- یک اختیار خرید اروپایی برای سهم وبملت با قیمت اعمال ۶۵۰۰ ریال، تاریخ سررسید ۱۳۹۸/۱۱/۳۰ و تاریخ انتشار ۱۳۹۸/۰۷/۱۳ موجود است.

۲- یک اختیار خرید اروپایی برای سهم شتران با قیمت اعمال ۴۷۴۶ ریال، تاریخ سررسید ۱۳۹۸/۱۱/۰۸ و تاریخ انتشار ۱۳۹۸/۰۳/۰۴ موجود است.

تلاطم مربوط به سهم‌های وبملت و شتران به ترتیب برابر با $\sigma_1 = 0.34084018$ و $\sigma_2 = 0.324435086$ برای محاسبه تلاطم از روش شبیه‌سازی تاریخی به کمک بازده لگاریتمی استفاده کردیم. هم‌چنین ضریب هم‌بستگی بین بازده‌های دو سهم برابر با $\rho = 0.492694524$ لازم به توضیح است که دو سهم انتخاب شده در بازه‌ی زمانی استفاده شده برای محاسبه تلاطم، هیچ‌گونه مجمع عادی و فوق‌العاده نداشتند. هم‌چنین هیچ افزایش سرمایه، تقسیم سود یا شکست قیمت سهم نیز برای آن‌ها اتفاق نیفتاده است. در جدول (۱)، قیمت تحلیلی اختیار خرید رنگین کمانی آسیایی هندسی برای این دو سهم منتخب بر حسب قیمت‌های اعمال مختلف و توسط فرمول (۱) محاسبه شده و با نماد C نشان داده شده است. در محاسبات انجام شده، تعداد روزهای باقیمانده تا سررسید اختیار معامله برابر با ۱۳۷ در نظر گرفته شده است که بر اساس تاریخ انقضای اختیار خرید اروپایی موجود بر روی سهم وبملت و به منظور مقایسه قیمت به دست آمده برای اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی با قیمت این اختیار خرید تعیین شده است. لازم به بیان است که برای محاسبه‌ی قیمت اختیار خرید رنگین کمانی آسیایی هندسی، عدد ۱۳۷ روز بر حسب سال در فرمول (۱) برای متغیر $T - t$ مورد استفاده قرار گرفته است. نرخ بهره بدون ریسک^۱ نیز به ترتیب برابر با ۰/۱۸، ۰/۲۰ و ۰/۲۲ است که بر اساس نرخ بهره اسناد خزانه اسلامی در دوره مورد بررسی انتخاب شده است. هم‌چنین برای بررسی میزان تأثیری که قیمت اعمال بر روی قیمت اختیار معامله مورد نظر دارد، سه قیمت اعمال مختلف را در نظر گرفته‌ایم.

1. Risk free interest rate

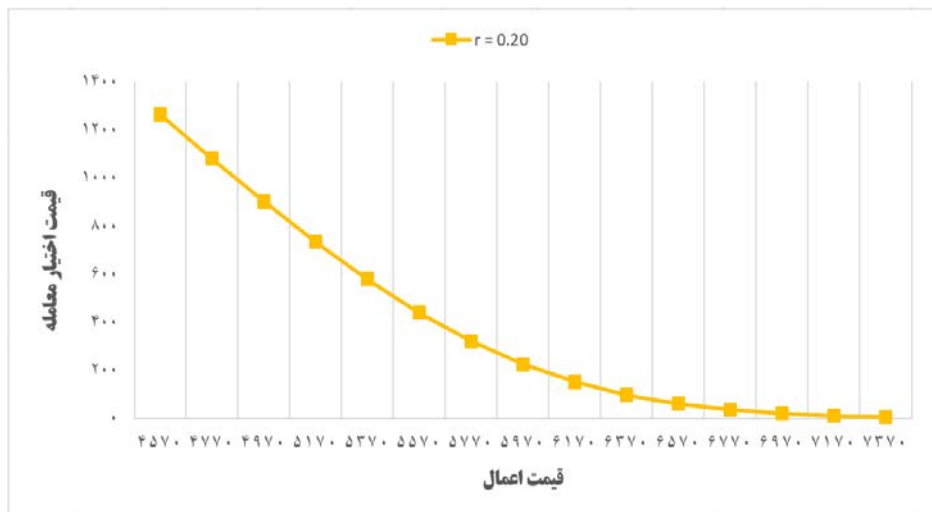
جدول ۱. قیمت تحلیلی اختیار خرید رنگین کمانی آسیایی هندسی برای دو سهم منتخب از

بازار سهام ایران بر حسب قیمت های اعمال مختلف

$\rho = ۰/۴۹۲۶۹۴۵۲۴$						
				$r = ۰/۱۸$	$r = ۰/۲۰$	$r = ۰/۲۲$
H	σ_1	σ_2	K	C	C	C
۰/۵	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۶۵	۳۱۳/۸۱۴۴	۳۲۴/۱۸۵۴	۳۳۴/۶۹۳۹
	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۷۰	۳۱۱/۱۶۹۳	۳۲۱/۴۹۸۸	۳۳۱/۹۶۶۹
	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۷۵	۳۰۸/۵۳۸۵	۳۱۸/۸۲۶۲	۳۲۹/۲۵۳۹
۰/۶	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۶۵	۲۹۱/۵۵۲۳	۳۰۲/۷۳۴۵	۳۱۴/۰۸۶۰
	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۷۰	۲۸۸/۷۴۴۰	۲۹۹/۸۷۶۴	۳۱۱/۱۷۹۷
	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۷۵	۲۸۵/۹۵۲۴	۲۹۷/۰۳۴۵	۳۰۸/۲۸۹۳
۰/۷	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۶۵	۲۷۱/۳۳۲۸	۲۸۳/۲۹۶۴	۲۹۵/۴۶۲۹
	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۷۰	۲۶۸/۳۶۶۹	۲۸۰/۲۷۱۷	۲۹۲/۳۸۱۹
	۰/۳۴	۰/۳۲	۵۷۷۵	۲۶۵/۴۲۰۰	۲۷۷/۲۶۵۵	۲۸۹/۳۱۸۹

۲. تحلیل میزان تاثیر پارامترهای مختلف مدل بر روی قیمت اختیار معامله موردنظر

در این بخش، ابتدا میزان تغییرات قیمت اختیار معامله مربوطه را بر حسب قیمت اعمال بررسی می کنیم. برای این منظور قیمت اولیه ی دو سهم پایه وبملت و شتران را به ترتیب $S_1 = ۶۶۶۱$ ریال و $S_2 = ۵۷۷۰$ ریال، تلاطم دو سهم را به ترتیب $\sigma_1 = ۰/۳۴۰۰۸۴۰۱۸$ و $\sigma_2 = ۰/۳۲۴۴۳۵۰۸۶$ ، ضریب هم بستگی آن ها را $\rho = ۰/۴۹۲۶۹۴۵۲۴$ ، پارامتر هرست $H = ۰/۵$ و نرخ بهره بدون ریسک $r = ۰/۲۰$ را در نظر می گیریم هم چنین قیمت اعمال را در محدوده ۴۵۷۰ ریال تا ۷۳۷۰ ریال متغیر فرض می کنیم.

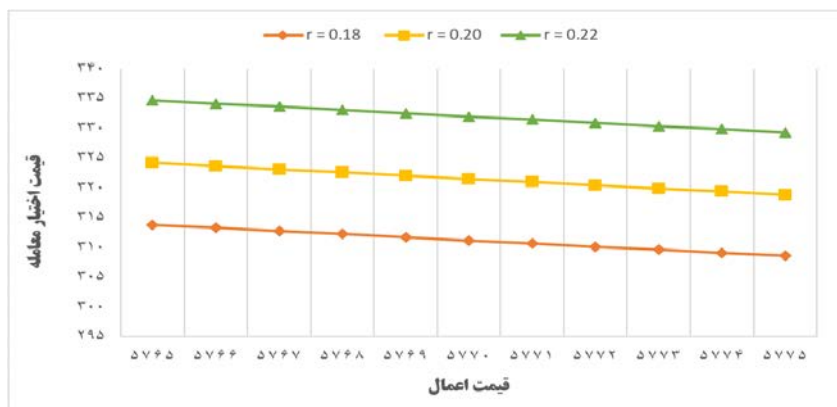


نمودار ۱. قیمت اختیار خرید رنگین کمانی آسیایی هندسی بر حسب قیمت اعمال

همان‌طور که مشاهده می‌شود قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی بر حسب قیمت اعمال نزولی است. در گام دوم به منظور بررسی میزان تاثیر پارامترهای مختلف مدل از جمله نرخ بهره بدون ریسک و پارامتر هرست بر روی قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی، نمودار مربوط به تغییرات قیمت بر اساس هر یک از این پارامترها را رسم می‌کنیم و میزان تاثیری را که بر روی قیمت اختیار معامله مورد نظر دارند، تحلیل می‌کنیم. برای این منظور محدوده تغییرات قیمت اعمال را ناچیز در نظر می‌گیریم تا تنها به بررسی اثر پارامترهای ذکر شده بر روی اختیار معامله یاد شده بپردازیم. نتایج به دست آمده با انتظارات ما انطباق دارد و درستی مدل را تایید می‌کند.

الف. تحلیل میزان تاثیر نرخ بهره بدون ریسک بر روی قیمت اختیار معامله مورد نظر

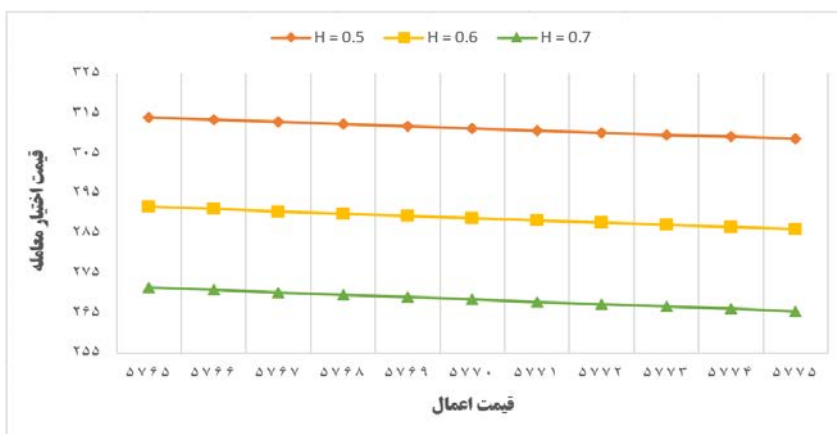
به منظور بررسی اثر نرخ بهره بدون ریسک مقادیر پارامترها را مشابه بخش قبل در نظر می‌گیریم. تنها داریم: $\sigma = 0.22$ و $r = 0.18$ و قیمت اعمال را در محدوده ۵۷۶۵ ریال تا ۵۷۷۵ ریال متغیر فرض می‌کنیم.



نمودار ۲. قیمت اختیار خرید رنگین کمانی آسیایی هندسی بر حسب قیمت اعمال برای نرخ بهره بدون ریسک ۰/۱۸، ۰/۲۰ و ۰/۲۲

در نمودار (۲) به وضوح مشاهده می‌شود با افزایش نرخ بهره بدون ریسک r ، قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی نیز افزایش می‌یابد.

ب. تحلیل میزان تاثیر پارامتر هرست بر روی قیمت اختیار معامله مورد نظر
به منظور بررسی اثر پارامتر هرست مقادیر اکثر پارامترهای مدل مشابه با بخش قبل است.
تنها داریم: $r = 0.18$ و 0.7 و 0.6 و 0.5 .



نمودار ۳. قیمت اختیار خرید رنگین کمانی آسیایی هندسی بر حسب قیمت اعمال برای پارامتر هرست ۰/۵، ۰/۶ و ۰/۷

همان‌طور که در نمودار (۳) مشاهده می‌شود، هنگامی که پارامتر هرست افزایش می‌یابد، قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی مورد نظر کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر می‌توان گفت که هر چه ویژگی وابستگی بلندمدت در سهم پایه بیش تر باشد (یعنی قیمت سهم بیش تر تحت تاثیر قیمت‌های گذشته و دورش باشد)، قیمت اختیار معامله مورد نظر نیز، بیش تر کاهش می‌یابد. این نتیجه تایید کننده شهود ما است. زیرا هرگاه قیمت سهم وابستگی زیادی به قیمت‌های گذشته‌اش داشته باشد، پیش‌بینی روند آتی آن در آینده ساده‌تر خواهد بود و بنابراین ریسک موجود در اختیار معامله کاهش می‌یابد و پیرو آن قیمت اختیار معامله هم کم‌تر می‌شود.

۳. مقایسه اختیار معامله مورد نظر با اختیار خرید اروپایی و آسیایی هندسی نظیرش

در این بخش بررسی می‌کنیم که اگر به جای اختیار معامله اروپایی (که هم اکنون در بازار بورس ایران معامله می‌شود) از اختیار معامله آسیایی هندسی و یا اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی استفاده شود، چه مزایایی برای سرمایه‌گذاران به همراه خواهد داشت. برای این منظور در جدول زیر قیمت اختیار خرید اروپایی برای سهم وبملت، قیمت اختیار خرید آسیایی هندسی برای سهم وبملت و همچنین قیمت اختیار خرید رنگین کمانی آسیایی هندسی برای دو سهم وبملت و شتران را به ازای نرخ بهره‌های مختلف به دست آورده‌ایم:

جدول ۲. مقایسه قیمت‌های سه نوع اختیار معامله، زمانی که نرخ بهره بدون ریسک به ترتیب برابر با ۰/۱۸، ۰/۲۰ و ۰/۲۲ است

قیمت اختیار خرید رنگین کمانی آسیایی هندسی (ریال)	قیمت اختیار خرید آسیایی هندسی (ریال)		
۳۱۱/۱۶۹۳	۴۹۹/۵۱۳۰	۸۷۱/۶۸۷۲	$r = 0.18$
۳۲۱/۴۹۸۸	۵۱۲/۵۹۳۰	۹۰۰/۷۱۵۸	$r = 0.20$
۳۳۱/۹۶۶۹	۵۲۵/۷۶۸۷	۹۳۰/۱۳۱۸	$r = 0.22$

مقادیر ورودی برای محاسبات جدول فوق به شرح زیر می‌باشد. برای قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی، با توجه فرمول ارایه شده در کتاب بیورک^۱ (بیورک، ۲۰۰۹)، مقادیر پارامترهای ورودی عبارت است از:

1. Björk

$$S = 6661, \sigma = 0.340084018, K = 6500 \text{ و } T - t = 137$$

برای قیمت گذاری اختیار معامله آسیایی هندسی، با توجه به فرمولی که توسط ژانگ (ژانگ، ۲۰۰۹) ارائه شده است، مقادیر ورودی به صورت زیر است:

$$S = 6661, \sigma = 0.340084018, K = 6500, T - t = 137 \text{ و } n = 88$$

و سرانجام برای قیمت گذاری اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی، مقادیر ورودی در فرمول (۱) عبارت است از:

$$S_1 = 6661, S_2 = 5770, \sigma_1 = 0.340084018, \sigma_2 = 0.324435086, K = 5770$$

$$\rho = 0.492694524, T - t = 137 \text{ و } H = 0.5$$

از دیدگاه نظری اختیار معامله های رنگین کمانی آسیایی هندسی به دلیل تنوع بخشی به مجموعه دارایی های پایه خود و همین طور به سبب خواص میانگین در فرم تابع عایدیشان دارای تلاطم ذاتی کمتری نسبت به اختیار معامله های اروپایی و آسیایی هستند که به معنای ریسک کم تر برای ناشر آنها است و به سبب همین امر انتظار می رود قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی نسبت به نوع آسیایی و اروپایی و به طور طبیعی آمریکایی کم تر باشد. حال با مشاهده نتایج جدول (۲) درمی یابیم که مطابق با انتظارمان قیمت اختیار معامله آسیایی نسبت به قیمت اختیار معامله اروپایی کم تر است. از طرف دیگر مشاهده می شود که با افزودن یک سهم دیگر به مجموعه دارایی پایه ای که اختیار معامله آسیایی هندسی بر روی آن تعریف می شود (معرفی اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی) می توان ریسک را به طور چشم گیری کاهش داد حتی با وجود این که سهم اضافه شده وابستگی کمابیش چشمگیری با سهم اول داشته باشد.

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله قصد داشتیم، اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی را در بازار بورس و اوراق بهادار ایران بررسی کنیم. بدین منظور ابتدا فرمول فرم-بسته ای برای قیمت گذاری اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی شامل دو دارایی پایه بر اساس حرکت براونی کسری معرفی کردیم. از آن جا که مطالعات موجود از جمله در بازار بورس ایران بیانگر آن است که فرایند قیمت بیشتر دارایی های پایه، دارای ویژگی هایی از جمله وابستگی بلندمدت و

خودمشتابهی هستند. از این رو حرکت براونی کسری به سبب برخورداری از این ویژگی‌ها گزینه مناسبی برای مدل‌سازی قیمت این دارایی‌های پایه است. در ادامه پژوهش با استفاده از فرمول ارایه شده به قیمت‌گذاری اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی بر روی دو سهم منتخب از بازار سهام ایران با ویژگی‌های وابستگی بلندمدت و خودمشتابهی پرداختیم. سپس تاثیر پارامترهای مختلف مدل را بر روی قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی بررسی نمودیم که نتایج به دست آمده درستی و صحت مدل مربوطه را به خوبی نشان می‌داد. در پایان به مقایسه قیمت این اختیار معامله با سایر اختیار معامله‌های سنتی از جمله اختیار معامله اروپایی و آسیایی هندسی پرداختیم. با توجه به نتایج به دست آمده درمی‌یابیم که اگر در کنار استفاده از اختیار معامله‌های اروپایی در بازار بورس ایران از اختیار معامله‌های رنگین کمانی آسیایی استفاده شود، افزون بر تنوع بخشی به بازار ابزار مشتقه، ریسکی که متوجه سرمایه‌گذاران استفاده کننده از این نوع ابزارها است به طور معناداری کاهش می‌یابد. هم‌چنین قیمت این نوع اختیار معامله‌ها به دلیل ریسک کم‌تر به مراتب از اختیار معامله‌های نوع اروپایی و در نتیجه آمریکایی کم‌تر است و از این رو امکان جذب سرمایه‌های بیش‌تر در بازار ابزار مشتقه را فراهم می‌آورد. بنابراین این اختیار معامله‌ها می‌توانند به طور گسترده در مدیریت ریسک سبدهای مالی به کار گرفته شوند و نظر سرمایه‌گذاران را به خود جلب کنند. هم‌چنین لازم به بیان است در محاسبات جدول (۲)، قیمت اعمال اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی مورد نظر را مینیمم قیمت دو سهم وبملت و شتران در زمان انتشار اختیار معامله یعنی ۵۷۷۰ ریال در نظر گرفته‌ایم. برپایه نتایج جدول (۲) مشاهده کردیم در این حالت، قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی مورد نظر از قیمت اختیار معامله اروپایی و آسیایی هندسی کم‌تر است. از طرفی می‌دانیم که قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی مورد نظر با افزایش قیمت اعمال، کاهش می‌یابد. بنابراین با توجه به مطالبی که بیان شد، اگر قیمت اعمال اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی مورد نظر را ماکسیمم قیمت دو سهم وبملت و شتران یا میانگین قیمت این دو سهم یا هر عددی بزرگ‌تر از مینیمم قیمت این دو سهم در نظر می‌گرفتیم، باز هم قیمت اختیار معامله رنگین کمانی آسیایی هندسی مورد نظر از قیمت اختیار معامله‌های اروپایی و آسیایی هندسی کم‌تر می‌شد. بنابراین هر انتخابی از قیمت اعمال این اختیار معامله که تابع عایدی را بی‌معنا نکند، هم‌چنان قیمت این اختیار معامله را از نظایر اروپایی، آمریکایی و آسیایی هندسی خود کم‌تر نگه می‌دارد.

References

- Abdolmaleki, A; Hamidian, M; & Baghani, A. (2020). Investigation of Fractal Property Price and Stock Returns of Tehran Stock Exchange Companies Using Nonlinear ARIFMA Model. Financial Engineering and Securities Management (Portfolio Management), 11(44), 207-226. (In Persian)
- Bin, P; & Fei, P. (2009). «Pricing Rainbow Asian Options». Systems Engineering-Theory & Practice, 29(11), pp.76-83.
- Björk, T. (2009). Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press.
- Hull, J. C. (2012). Options, futures, and other derivatives (Eight Edition). New Jersey: PrenticeHall.
- Hunt, G. A. (1951). «Random fourier transforms». Transactions of the American Mathematical Society, 71(1), 38-69.
- Hurst, H. E. (1951). «Long-term storage capacity of reservoirs». Transactions of the American society of civil engineers, 116(1), 770-799.
- Khajavi, S; & Abdi Taleb Beigi, H. (2016). Empirical analysis of fractal dimensions on cash return and price indices of listed companies of Tehran Stock Exchange, Journal of Investment Knowledge, 5(18), 79-93. (In Persian)
- Kemna, A. G; & Vorst, A. C. (1990). «A pricing method for options based on average asset values». Journal of Banking & Finance, 14(1), 113-129.
- Kolmogorov, A. N. (1940). «Wienersche spiralen und einige andere interessante kurven in hilbertscen raum, cr (doklady)». Acad. Sci. URSS (NS), 26, 115-118.
- Lévy, P. (1953). «Random functions: general theory with special reference to Laplacian random functions» (Vol. 1, No. 12). University of California Press.
- Mandelbrot, B. B; & Van Ness, J. W. (1968). «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications». SIAM Review, 10(4), 422-437.
- Margrabe, W. (1978). «The value of an option to exchange one asset for another». The journal of finance, 33(1), 177-186.
- Mousavi Shiri, S; Vaghfi, S; Ahangary, M. (2013). Investigating the Long-Term Memory of Total Price Index of the Tehran Stock Exchange (A Case Study: Pharmaceutical Industry). Journal of Health Accounting, 2(4), 78-96. (In Persian)
- Nikoomaram, H; Saeedi, A; & Anbarestani, M. (2012). Studying Long Memory of Tehran Stock Exchange. Financial Engineering and Securities Management (Portfolio Management), 2(9), 47-64. (In Persian)
- Norros, I; Valkeila, E; & Virtamo, J. (1999). «An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions». Bernoulli, 5(4), 571-587.
- Nualart, D. (2006). «Fractional Brownian motion: stochastic calculus and applications». In International Congress of Mathematicians (Vol. 3, pp. 1541-1562).

- Ouwehand, P; & West, G. (2006). «Pricing rainbow options». Wilmott magazine, 5, 74-80.
- Rahnamay Roodposhti, F; & Pedram, P. (2012). Fractal Analysis of Tehran Stock Exchange Index With RS Method. Journal of Investment Knowledge, 1(3), 63-79. (In Persian)
- Rogers, L. C. G. (1997). «Arbitrage with fractional Brownian motion». Mathematical Finance, 7(1), 95-105.
- Rubinstein, M. (1991). «Somewhere over the rainbow». Risk, 4(11), 61-63.
- Salehi, M; Zamanimoghaddam, S. (2014). Existence of Long Memory in Tehran Stock Exchange Indexes and its Impact on the Weak Form of Efficient Market Hypothesis (EMH). Financial Management Strategy, 2(1), 59-71. (In Persian)
- Shoaraee, S; Sanaee, M. (2011). Modeling and Forecasting Tehran Stock Exchange Return using ARFIMA and FIGARCH. Journal of Financial Accounting Research, 2(4), 173-186. (In Persian)
- Summe, K. A. (2012). An Examination of Lehman Brothers' Derivatives Portfolio Postbankruptcy-Would Dodd-Frank Have Made a Difference? Hoover Institution, Stanford University Book Chapters.
- Wang, L; Zhang, R; Yang, L; Su, Y; & Ma, F. (2018). «Pricing geometric Asian rainbow options under fractional Brownian motion». Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 494, 8-16.
- Wilmott, P. (2013). Paul Wilmott on quantitative finance. John Wiley & Sons.
- Zhan, H; & Cheng, Q. (2010). «A simple approach to valuing Asian rainbow options». International Journal of Electronic Customer Relationship Management, 4(1), pp.60- 76.
- Zhang, H. (2009). Pricing asian options using Monte Carlo methods.
- Zhang, P. G. (1998). Exotic Options: A Guide to Second Generation Options.