

Measuring the Maximum Optimal Portfolio Loss by Comparing the Dependency Structure of Normal and T-Copulas¹

Mohammad Reza Haddadi², Manizheh Goudarzi³

Received: 01 February 2025

Revised: 22 October 2025

Accepted: 25 January 2026

Published Online: 21 March 2026

Research Paper

Highlights

- Accurate risk estimation is vital for effective investment strategies, especially in volatile markets.
- CVaR is used for portfolio optimization, offering a solid framework for loss assessment.
- Copula functions model dependencies between asset returns, improving risk assessment accuracy.
- Monte Carlo simulations predict future portfolio risks, providing a thorough evaluation of potential losses.
- Normal copula gives lower loss estimates, while the Student's t-copula yields more accurate risk assessments.
- Findings underscore the importance of copula selection in risk assessment.

Abstract

Given the importance of risk in financial markets, the accurate estimation of it has always been a primary concern for participants in these markets. The recurrent financial crises resulting from financial risk over the past two decades globally have underscored the necessity of precise financial risk estimation, with a focus on market risk. In this study, portfolio optimization is initially performed using the Conditional Value at Risk (CVaR) criterion, followed by portfolio loss measurement using the copula functions to account for the dependencies between the examined components. The CVaR is employed to estimate the loss of the optimal portfolio. The size of the optimal portfolio risk is calculated based on historical data, and then Monte Carlo simulation is used to forecast portfolio risk for the next period. Finally, to achieve the most accurate estimate of the optimal portfolio loss, the simulated loss using various distributions is compared with the loss derived from historical data. The data examined pertain to six stocks from the Tehran Stock Exchange, collected from April 2017 to June 2021. The results indicate that the normal copula for asset returns shows a lower estimate of the optimal portfolio loss, while using the Student's t-copula with lower degrees of freedom provides a more accurate risk estimation for the optimal portfolio.

Keywords: Conditional Value at Risk, Copula Function, Market Risk, Monte Carlo Simulation, Dependence Tail.

JEL Classification: G11, G12.

1. doi: 10.22034/JSE.2025.11924.1950

2. Associate Professor, Zagros Financial Research Group, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran. (Email: haddadi@abru.ac.ir). Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran.

3. Assistant Professor, Zagros Financial Research Group, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran. (Corresponding Author). (Email: m.goudarzi@abru.ac.ir). Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran.



Copyright © 2026 The Authors. Published by Securities and Exchange Organization. This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>). Non-commercial uses of the work are permitted, provided the original work is properly cited.

Cite This Article: Haddadi, Mohammad Reza; Goudarzi, Manizheh; (2026). Measuring the Maximum Optimal Portfolio Loss by Comparing the Dependency Structure of Normal and T-Copulas. *Quarterly Journal of Securities Exchange*, 19 (73), 59-86.

<http://10.22034/JSE.2025.11924.1950>

Homepage: <https://journal.seo.ir>

Introduction

Accurate risk estimation in financial markets is a critical concern for investors, portfolio managers, and policymakers alike. The ability to quantify and manage risk effectively can significantly influence investment strategies and financial stability. Over the past two decades, the global financial landscape has experienced recurrent crises, which have underscored the necessity for precise financial risk assessment, particularly in the realm of market risk. This study seeks to address these challenges by employing advanced methodologies to enhance the accuracy of financial risk estimation, focusing specifically on portfolio optimization and loss measurement. In this regard, the maximum loss of the optimal portfolio of stocks is measured using two different dependency structures, namely the Gaussian and T-joint dependency structures.

Methodology

This research employs a systematic approach to portfolio optimization, utilizing the Conditional Value at Risk (CVaR) criterion as a fundamental tool for assessing potential losses in investment portfolios. The initial phase involves optimizing the portfolio by selecting asset allocations that minimize risk while maximizing expected returns. Following this optimization, the study measures portfolio losses using copula functions, which are statistical tools used to model and analyze the dependencies between different financial assets. By applying copulas, we can better understand the joint behavior of asset returns, particularly during extreme market conditions.

The CVaR methodology is employed to estimate the potential loss of the optimal portfolio under adverse market scenarios. Historical data, spanning from April 2017 to June 2021, is utilized to calculate the size of the optimal portfolio risk. Subsequently, Monte Carlo simulation techniques are applied to forecast portfolio risk for the upcoming period. This simulation involves generating a large number of random samples from the estimated distributions of asset returns, allowing for a comprehensive assessment of potential future losses.

To achieve the most accurate estimate of the optimal portfolio loss, the study compares the simulated losses derived from various statistical distributions with the losses calculated from historical data. This comparative analysis is crucial for validating the robustness of the risk estimation methods employed.

Results

The empirical analysis focuses on six selected stocks from the Tehran Stock Exchange, chosen for their representativeness of the market and the availability of reliable data. The results reveal significant insights into the

effectiveness of different copula functions in estimating portfolio risk. Notably, the application of the normal copula to asset returns results in a lower estimate of the optimal portfolio loss, suggesting a more conservative risk profile. However, when employing the Student's t-copula, particularly with lower degrees of freedom, the study finds that it provides a more accurate and realistic risk estimation for the optimal portfolio. This finding indicates that the choice of copula can substantially impact risk assessments, especially in markets characterized by heavy tails and extreme events.

Discussion

The implications of these findings are profound for investors and financial analysts. The study highlights the critical importance of selecting appropriate copula functions when conducting risk assessments for investment portfolios. The observed differences in loss estimates between the normal copula and the Student's t-copula emphasize the necessity of incorporating dependency structures into risk models. By understanding how asset returns interact during periods of market stress, investors can make more informed decisions that align with their risk tolerance and investment objectives.

Moreover, this research contributes to the existing literature on financial risk management by demonstrating how advanced statistical methods, such as CVaR and copula functions, can enhance the precision of risk estimation. The findings suggest that integrating these methodologies into portfolio management practices can lead to improved risk-adjusted returns and better overall investment performance.

Conclusions

In conclusion, this study reaffirms the critical role of precise risk estimation in the effective optimization of investment portfolios within financial markets. The application of CVaR, in conjunction with copula functions, significantly enhances the accuracy of risk assessments, providing valuable insights for investors navigating complex market dynamics. As financial markets continue to evolve, the need for robust risk management strategies becomes increasingly paramount. Future research should explore the integration of additional factors, such as macroeconomic indicators and behavioral finance principles, to further refine risk estimation techniques and enhance the resilience of investment portfolios against market volatility.

Author Contributions

All authors contributed equally to the conceptualization of the article and writing of the original and subsequent drafts.

Data Availability Statement

Data available on request from the authors.

Acknowledgements

The authors would like to thank anonymous reviewers for their valuable suggestions in manuscript revision.

Ethical Considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, and plagiarism, and any form of misconduct.

Funding

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.



سازمان بورس و اوراق بهادار، مدیریت پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی
فصلنامه بورس اوراق بهادار، سال نوزدهم، شماره ۷۳، بهار ۱۴۰۵، صص ۸۶-۵۹

اندازه گیری حداکثر ضرر سبد بهینه سهام با مقایسه ساختار وابستگی مفصل گوسی و تی^۱

محمد رضا حدادی^۲، منیژه گودرزی^۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۱۳ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۶/۳۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۰۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۰۱

مقاله پژوهشی

نکات برجسته

- تخمین دقیق ریسک برای استراتژی های سرمایه گذاری مؤثر، به ویژه در بازارهای بی ثبات، حیاتی است.
- CVaR برای بهینه سازی سبد سهام استفاده می شود و چارچوبی محکم برای ارزیابی زیان ارائه می دهد.
- توابع کاپولا وابستگی های بین بازده دارایی ها را مدل سازی می کنند و دقت ارزیابی ریسک را بهبود می بخشد.
- شبیه سازی های مونت کارلو، ریسک های آینده سبد سهام را پیش بینی می کنند و ارزیابی کاملی از زیان های احتمالی ارائه می دهند.
- کاپولای معمولی تخمین های زیان کمتری ارائه می دهد، در حالی که کاپولای تی-استیودنت، ارزیابی های ریسک دقیق تری را ارائه می دهد.
- یافته ها بر اهمیت انتخاب کاپولا در ارزیابی ریسک تأکید می کنند.

چکیده

با توجه به اهمیت موضوع ریسک در بازارهای مالی، برآورد صحیح و دقیق آن همواره دغدغه اصلی حاضران در این بازارها است. بحران های پیاپی و پیوسته مالی ناشی از ریسک مالی که در دو دهه اخیر در مقاطع مختلف در سطح جهان روی داده است لزوم برآورد دقیق ریسک مالی با تمرکز بر ریسک بازار را بیش از پیش مطرح ساخته است. در این پژوهش ابتدا بهینه سازی سبد سهام با معیار CVaR انجام می شود سپس به اندازه گیری ضرر سبد با به کار بردن تابع مفصل، به منظور در نظر گرفتن وابستگی مولفه های مورد بررسی، پرداخته می شود که در آن برای تخمین ضرر سبد بهینه از ارزش در معرض خطر شرطی استفاده می شود. در این راستا اندازه ریسک سبد بهینه برای داده های تاریخی محاسبه و سپس با شبیه سازی مونت کارلو ریسک سبد در یک دوره بعد پیش بینی می شود. در انتها برای رسیدن به دقیق ترین برآورد از ضرر سبد بهینه، مقدار ضرر شبیه سازی شده با توزیع های مختلف، با مقدار ضرر به دست آمده از داده های تاریخی مقایسه می شود. داده های مورد مطالعه مربوط به شش سهام از بورس اوراق بهادار تهران هستند که در بازه زمانی فروردین ۱۳۹۶ تا خرداد ۱۴۰۰ جمع آوری شده است. نتیجه های به دست آمده نشان می دهد که مفصل نرمال برای بازده دارایی ها، تخمین کمتری از ضرر سبد بهینه را نشان می دهد و استفاده از مفصل تی-استیودنت با درجه آزادی کم تر منجر به تخمین دقیق تری از ریسک سبد بهینه می شود.

واژه های کلیدی: اختیار معامله، مدل بلک شولز، مدل گرام چارلیه، چولگی، کشیدگی.

طبقه بندی موضوعی: G11 و G12

doi: 10.22034/JSE.2025.11924.1950

۱. دانشیار، گروه پژوهشی مالی زاگرس، دانشگاه آیت الله ... بروجردی (ره)، بروجرد، ایران. (haddadi@abru.ac.ir).
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله ... بروجردی، بروجرد، ایران.
۳. استادیار، گروه پژوهشی مالی زاگرس، دانشگاه آیت الله ... بروجردی (ره)، بروجرد، ایران. (نویسنده مسئول). (m.goudarzi@abru.ac.ir).

حق انتشار این مستند، متعلق به نویسندگان آن است. © ۱۴۰۵. ناشر این مقاله، سازمان بورس و اوراق بهادار است.
این مقاله تحت گواهی زیر منتشر شده و هر نوع استفاده غیرتجاری از آن مشروط بر استناد صحیح به مقاله و با رعایت شرایط مندرج در آدرس زیر مجاز است.



Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International license
(https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

استناد: حدادی، محمد رضا؛ گودرزی، منیژه؛ (۱۴۰۵). اندازه گیری حداکثر ضرر سبد بهینه سهام با مقایسه ساختار وابستگی مفصل گوسی و تی. *فصلنامه بورس اوراق بهادار*، ۱۹ (۷۳)، ۸۶-۳۵.

https://10.22034/JSE.2025.11924.1950

Homepage: <https://journal.seo.ir>

مقدمه

در دنیای مالی، مدیریت ریسک یکی از مهم‌ترین و چالش‌برانگیزترین جنبه‌ها در تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری است. سرمایه‌گذاران به دنبال راهکارهایی هستند که نه تنها بازدهی بالایی را به همراه داشته باشد، بلکه ریسک‌های مرتبط با نوسانات بازار را نیز به حداقل برساند. در این راستا، اندازه‌گیری حداکثر ضرر سبدهای سرمایه‌گذاری به عنوان یک معیار کلیدی برای ارزیابی ریسک و پایداری سبد بهینه مطرح می‌شود. بیشترین ضرر به معنی بیشترین افت ارزش یک سبد از بالاترین نقطه خود تا پایین‌ترین نقطه بعدی است و می‌تواند نشان‌دهنده ریسک‌های بالقوه‌ای باشد که سرمایه‌گذاران ممکن است با آن روبرو شوند. زمانی که تنها اطلاع در دسترس در مورد بازدهی یک سهم است، نمی‌توان در مورد عملکرد آن بحث کرد یعنی نمی‌توان فقط از طریق بازده و بدون در نظر گرفتن ریسک به بررسی راه‌حل‌های مختلف سرمایه‌گذاری پرداخت. با اینکه تمامی سرمایه‌گذاران بازده بیش‌تر را در الویت قرار می‌دهند، اما باید در نظر داشت که سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز هستند. بنابراین ارزیابی درست عملکرد یک دارایی یا سبد دارایی‌ها^۱ باید بر اساس ریسک آن‌ها صورت گیرد (کوله^۲ و همکاران، ۲۰۱۷).

این پژوهش بر آن است تا حداکثر ضرر سبد بهینه‌ای از سهام را با استفاده از دو ساختار وابستگی مختلف، یعنی ساختار وابستگی مفصل گوسی و تی اندازه‌گیری کند. در این راستا، مهمترین مساله چگونگی محاسبه حداکثر ضرر سبد بهینه سهام است بنابراین به بررسی روش ریاضی مورد استفاده برای مدل‌سازی وابستگی بین دارایی‌ها و تأثیر آن بر حداکثر ضرر سبد خواهیم پرداخت. همچنین شیوه استفاده از توزیع‌های گوسی و تی برای تحلیل رفتار قیمت‌ها و نوسانات بازار مورد بررسی قرار خواهد گرفت. توزیع تی به خاطر قابلیت بهتر در مدل‌سازی نوسانات شدید در بازار، می‌تواند به عنوان یک ابزار قوی در تحلیل ریسک به شمار آید.

هدف این پژوهش تحلیل و بررسی روش‌های محاسبه حداکثر ضرر سبد بهینه با استفاده از ساختارهای وابستگی گوسی و تی شامل شناسایی و بیان مراحل مختلف محاسباتی و آماری است که برای هر یک از این مدل‌ها لازم است. همچنین مقایسه نتایج حاصل از این دو مدل و

1. Portfolio

2. Kole

تحلیل نقاط قوت و ضعف هر یک با توجه به نتایج به دست آمده، نقاط قوت و ضعف هر مدل در زمینه دقت پیش‌بینی و کاربردپذیری هدف دیگر این پژوهش است.

این پژوهش می‌تواند به سرمایه‌گذاران و مدیران سبد کمک کند تا با درک بهتر از ساختارهای وابستگی و تأثیر آنها بر حداکثر ضرر، تصمیمات بهتری در زمینه تخصیص دارایی و مدیریت ریسک اتخاذ کنند. همچنین نتایج این پژوهش می‌تواند به توسعه مدل‌های پیشرفته‌تر در مدیریت ریسک و بهینه‌سازی سبدهای سرمایه‌گذاری کمک کند. با توجه به پیچیدگی‌های بازارهای مالی و نوسانات غیرقابل پیش‌بینی، این پژوهش می‌تواند به عنوان یک منبع معتبر برای تحلیل و ارزیابی ریسک‌های مرتبط با سبدهای سرمایه‌گذاری عمل کند و به بهبود استراتژی‌های سرمایه‌گذاری منجر شود. این پژوهش ضمن بهبود مدل‌های پیشین به بررسی و توسعه مدل‌های جدید برای اندازه‌گیری حداکثر ضرر سبد بهینه با استفاده از دو ساختار وابستگی گوسی و تی می‌پردازد.

مبانی نظری و توسعه فرضیه‌ها

در مدیریت ریسک ارزیابی رفتار دم توزیع (بیشینه ضرر) اهمیت دارد. نظریه نقاط فرین^۱ یک تکنیک برای محاسبه زیان‌ها و احتمالات برای مقادیر فرین یک توزیع است که در مدیریت ریسک مفید است. زیرا مقادیر فرین در اصل حوادث نادر هستند، از این رو به دست آوردن داده‌های واقعی برای آن‌ها کار غیر بدیهی است (بروکس و همکاران، ۲۰۰۵). در نظریه نقاط فرین تعمیم یافته اگر X از یک توزیع نامعلوم پیروی کند، آن‌گاه با توجه به قضیه فیشر-تپت^۲ مقادیر فرین X به توزیع GEV^3 همگرا است:

$$F(X \leq x) = \begin{cases} \exp \left[- \left(1 + \frac{\xi(x-m)}{\theta} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] & \cdot \quad \xi \neq 0 \\ \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-m}{\theta} \right) \right] & \cdot \quad \xi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

-
1. Extreme Value Theory
 2. Fisher - Tippet theorem
 3. Generalized Extreme Value

که در آن x در رابطه $0 < (1 + \frac{\xi(x-m)}{\theta})$ صدق می‌کند، m میانگین، θ انحراف استاندارد و ξ پارامتر شکل است (روکو^۱، ۲۰۱۴).

کونو و یامازاکی (کونو و یامازاکی^۲، ۱۹۹۱) مدل میانگین انحراف مطلق (MAD) را به یک مدل برنامه ریزی خطی به جای یک برنامه درجه دوم تبدیل و به عنوان یک معیار ریسک استفاده نمودند. در این راستا، بهینه‌سازی با روش MAD ، که در آن مساله به حداقل رساندن ریسک مورد نظر با سطح معینی از بازده مورد انتظار مدنظر است، مورد توجه قرار گرفت. به عنوان مثال کونو و همکاران (کونو و همکاران، ۱۹۹۳) در سال ۱۹۹۳ مدل MAD را در معرفی چولگی به کار بردند. در مدل‌های سبد بهینه معمولاً از $CVaR$ بجای انحراف معیار استفاده می‌شود زیرا در مقادیر خیلی بزرگ یا خیلی کوچک در توان دو رسیدن خطای محاسبات را افزایش می‌دهد. به طور کلی، $CVaR$ به سرمایه‌گذاران کمک می‌کند تا نوسانات را بهتر درک کنند و ریسک‌های مطلق را به شیوه‌ای ساده و قابل فهم ارزیابی کنند (بدیو^۳ و همکاران، ۲۰۲۳).

معیارهای دیگری مانند ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی نیز توسط پژوهشگران زیادی به کار گرفته شد که تعریف آنها به اختصار بیان می‌شود. چندانک α متغیر تصادفی X ، کوچک‌ترین عدد δ است که در رابطه‌ی $F_X(\delta) \geq \alpha$ صدق کند و منظور از F_X تابع توزیع متغیر تصادفی X است. هنگامی که متغیر تصادفی X با تابع توزیع پیوسته $F(\cdot)$ میزان زیان یا بازدهی منفی در یک بازه زمانی را مشخص می‌کند، آن‌گاه ارزش در معرض خطر^۴، چندانک α توزیع F ، برابر است با:

$$VaR_{\alpha} = F^{-1}(\alpha)$$

که در آن F^{-1} تصویر وارون تابع F است. به عبارت دیگر، VaR متغیر تصادفی X در سطح اطمینان α به صورت زیر تعریف می‌شود (آباد^۵ و همکاران، ۲۰۱۴)

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{x | F_X(x) = P_r(X \leq x) \geq \alpha\} \quad (۲)$$

-
1. Rocco
 2. Konno and Yamazaki
 3. Bedoui
 4. Value at Risk
 5. Abad

ارزش در معرض خطر شرطی تفسیر مشابه با ارزش در معرض خطر معمولی ارائه می‌دهد با این تفاوت که با شرط نامطلوب بودن بازار، همراه است. این معیار میانگین α درصد از بدترین زیان‌هاست و می‌توان آن را به صورت زیر محاسبه کرد (راکفلر^۱ و همکاران، ۲۰۰۶):

$$CVaR = E[X|X > VaR_{\alpha}(X)] \quad (۳)$$

برخی از مطالعاتی که در زمینه ریسک بازار و انتخاب سبد بهینه صورت گرفته است می‌توان به میثم رادپور و حسین عبده تبریزی (۱۳۹۳) اشاره کرد که روی اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار کار کردند. حبیبی ثمر و همکاران (۱۳۹۴) رابطه ریسک نقد شوندگی و ریسک بازار را با بازده سهام رشدی و ارزشی با رویکرد مدل AHP در بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار دادند. همچنین گرامی و سجادی (۱۳۹۵) عملکرد و ریسک بازار بانک‌های تجاری را با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های فازی^۲ ارزیابی کردند. بابالویان و همکاران (۱۳۹۹) به مقایسه ارزش در معرض خطر سهام تهران با بازارهای بین المللی پرداختند و زمانی و همکاران (۱۳۹۹) پیش بینی ارزش در معرض خطر به روش‌های پارامتریک و شبیه‌سازی با رویکرد هوش مصنوعی را انجام دادند. در انتخاب سبد بهینه می‌توان به پژوهشی از میرزایی و زارعی محمودآبادی (۱۳۹۹) اشاره کرد که الگوریتم فراابتکاری ترکیبی ژنتیک بر اساس زندگی گروهی شیرها را در بهینه سازی سبد سهام ۵۰ شرکت برتر بورسی اوراق بهادار تهران به کار بردند. همچنین نیکو و همکاران (۱۳۹۹) به مدل‌سازی عملکرد پرتفوی با در نظر گرفتن محدودیت‌های حسابداری ذهنی و نقدشوندگی برای انتخاب سبد بهینه در بورس اوراق بهادار تهران استفاده کردند. حدادی و همکاران (۱۳۹۹) استراتژی تنوع سازی سبد سهام بهینه با استفاده از معیارهای ریسک $WCVaR, \beta$ و مقایسه آن با روش مونت کارلو پرداختند. همچنین حدادی و همکاران در سال ۱۴۰۰ به بهینه سازی سبد سهام با معیارهای MAD و $CVAR$ در روش کلاسیک و فراابتکاری پرداختند. بهزادی در سال ۱۳۹۹ به اندازه گیری ریسک سبد سهام با در نظر گرفتن همبستگی نامتقارن دنباله‌ای در بازار سهام پرداختند. به منظور مدل کردن از مدل‌های از گارچ و مفصل استفاده نمود و نشان دادند که مدل‌های مبتنی بر مفصل عملکرد بهتری دارد.

1. Rockafellar

2. Fuzzy data envelopment analysis

کیانزاده و همکاران (۱۴۰۲) به مقایسه دقت مدل‌های یادگیری ماشین منتخب برای پیش‌بینی قیمت سهام در بازار بورس اوراق بهادار پرداختند. آدینه‌وند و همکاران نیز (۱۴۰۲) بررسی مدل‌های کارایی، میانگین-نیمه واریانس مارکوویتز، ارزش در معرض ریسک و الگوریتم ژنتیک چندهدفه تحت معیارهای ریسک MSV و $CVaR$ در انتخاب سبد سهام بهینه شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار را مورد توجه قرار دادند.

خیاطیان و همکاران (۱۴۰۳) در پژوهشی به ارائه مدلی برای توصیه به سرمایه‌گذاران درباره سبدهای سرمایه‌گذاری با سطوح ریسک مختلف پرداختند. همچنین سروستانی و همکاران در سال ۱۴۰۳ به کمک روش خودرگرسیون برداری، پیش‌بینی بازه‌ای مقدار مربوط به کمترین و بیشترین قیمت روزانه را در سبد سهام انجام دادند و سپس بر اساس آن سبد بهینه روزانه شکل دادند.

ژانگ و ژانگ^۱ (۲۰۲۲) از فواصل تصادفی برای توصیف ریسک بازده دارایی‌های مالی استفاده کردند و معیار ارزش در معرض ریسک شرطی بازه‌ای مقدار را معرفی و مورد پیش‌بینی قرار دادند. سپس مدل سبد بهینه بر اساس این معیار را مورد مدل‌سازی و محاسبه قرار دادند. لو^۲ و همکاران (۲۰۲۲) با پیشنهاد مدل بازه‌ای مقدار اتورگرسیون آستانه اصلاح شده با فاکتورهای فاصله‌ای به پیش‌بینی بازه‌ای مقدار قیمت سهام پرداختند. چندین عامل با ارزش بازه‌ای و متغیرهای آستانه نقطه‌ای مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند و نتایج تجربی نشان می‌دهد که عملکرد مدل پژوهش با آستانه مناسب از سایر مدل‌های پیش‌بینی بازه‌ای بهتر است. ساکالوسکاس^۳ و همکاران (۲۰۲۳) با روش نوآورانه‌ای در ابتدا سهام کاندید از شرکت‌های حاضر در شاخص S&P را انتخاب کردند و سپس به تخصیص وزن بهینه و تشکیل سبدی از سهام کاندید با رویکرد میانگین واریانس اقدام کردند. در حوزه بهینه‌سازی سبد با رویکردهای تحلیل سبد، پژوهش‌اندکی انجام شده است، برای نمونه، هونگ^۴ و همکاران (۲۰۲۳) به کمک مدلی چند هدفه و با رویکرد میانگین واریانس، مسئله انتخاب سبد سهام را با زمان اجرای متفاوت ضمن در نظر گیری سرمایه‌گذاری مجدد و هم افزایی بین سهام، حل کردند.

1. Zhang and Zhang

2. Lu

3. Sakalauskas

4. Hong

در این پژوهش با اندازه گیری حداکثر ضرر سبد بهینه با استفاده از دو ساختار وابستگی گوسی و تی، امکان تحلیل دقیق تری از رفتار قیمت ها و نوسانات بازار فراهم می شود. یکی از نوآوری های کلیدی این پژوهش، مقایسه سیستماتیک بین ساختارهای وابستگی گوسی و تی است. این مقایسه می تواند به شناسایی نقاط قوت و ضعف هر یک در شرایط مختلف بازار کمک کند و به سرمایه گذاران امکان انتخاب بهتری برای مدیریت ریسک را بدهد. همچنین این پژوهش به بررسی چگونگی عملکرد این دو مدل در شرایط بحرانی بازار، مانند بحران های مالی یا نوسانات شدید، می پردازد. از آنجا که توزیع تی قابلیت بهتری در مدل سازی رفتارهای افراطی دارد، این پژوهش می تواند به کشف الگوهای جدید در تحلیل ریسک کمک کند. استفاده از داده های واقعی بازار برای ارزیابی عملکرد مدل ها و تحلیل نتایج حداکثر ضرر سبد بهینه، یکی دیگر از نوآوری های این پژوهش است. این رویکرد می تواند به اعتبارسنجی مدل ها و بهبود دقت پیش بینی ها کمک کند. در نهایت این پژوهش نه تنها به تحلیل نظری می پردازد بلکه پیشنهادهای عملی برای سرمایه گذاران و مدیران سبد ارائه می دهد. این پیشنهادها می توانند شامل استراتژی های بهینه سازی سبد و مدیریت ریسک بر اساس نتایج به دست آمده باشند.

روش شناسی پژوهش

رویکردهای بسیاری برای محاسبه ارزش در معرض خطر وجود دارد، اما در مجموع می توان روش های محاسبه ارزش در معرض خطر را به دو نوع پارامتریک^۱ و ناپارامتریک^۲ تقسیم نمود. اگر فرض شود توزیع بازده به خانواده خاصی از توزیع ها مانند نرمال تعلق دارد روش پارامتریک استفاده شده است. رویکرد دیگر روش ناپارامتریک که بر مبنای آمار ناپارامتریک است و فرض خاصی را برای توزیع بازده دارایی ها متصور نمی شود. رویکردهای ناپارامتریک از آخرین توزیع تجربی بازده به جای در نظر گرفتن یک توزیع نظری، برای برآورد سنجه های ریسک بهره می گیرند و بر این فرض استوارند که آینده نزدیک تا اندازه زیادی به گذشته نزدیک شباهت دارد. بنابراین می توان از اطلاعات مربوط به گذشته برای پیش بینی خطر آینده استفاده کرد. روشن است که این فرض ممکن است با توجه به شرایط، معتبر یا نامعتبر باشد. بنابراین می توان گفت همه رویکردهای ناپارامتریک براساس روش شبیه سازی تاریخی^۳ و شبیه سازی مونت کارلو هستند

1. Parametric
2. Nonparametric
3. Historical Simulation

(صادقی خوانساری، ۱۳۹۵). در این مقاله با استفاده از تقریب زیر CVaR محاسبه می‌شود. برای VaR در سطح اطمینان α ، می‌توان از فرمول زیر CVaR را به دست آورد:

$$CVaR = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=\alpha}^1 P_i VaR_i \quad (4)$$

که در آن P_i یک احتمال تجمعی و VaR_i ارزش در معرض خطر دارایی i است.

تابع مفصل^۱

توابع مفصل برای اولین بار توسط اسکالر (اسکلار، ۱۹۵۹) معرفی شد. مطالعه توابع مفصل و کاربردهای آن یکی از روش‌های جدید در مدیریت ریسک بازار است که با استفاده از آن می‌توان مقدار ریسک بازار یک سبد را اندازه‌گیری کرد. نلسن^۲ (۲۰۰۷) با استفاده از توابع مفصل به تحلیل همبستگی و ضرایب مربوط به آن پرداخت. امروزه توابع مفصل به طور فراوان در علوم مختلف به کار می‌روند. مندز و سوزا^۳ (۲۰۰۴) از این توابع برای تحلیل مسایل پیشرفته مالی و مدیریت ریسک استفاده کردند. مفصل‌ها توابعی هستند که توابع توزیع چند متغیره را به توابع توزیع حاشیه‌ای آن‌ها متصل می‌کنند. همچنین مفصل‌ها را می‌توان به صورت توابع توزیع چند متغیره‌ای تعریف کرد که توابع توزیع حاشیه‌ای آن‌ها به صورت یکنواخت روی فاصله (۰، ۱) توزیع شده است که دارای خصوصیات زیر است (نلسن، ۲۰۰۷):

$$1. \quad C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

$$2. \quad C, -n \text{ صعودی}^4 \text{ و جهت دار}^5 \text{ است،}$$

$$3. \quad C_i, \text{ حاشیه‌ای‌های } C \text{ هستند که در } C_i(u) = C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$$

به ازای هر $u \in [0, 1]$ صدق می‌کند.

قضیه اسکالر بیان می‌کند که برای هر توزیع n -بعدي F با توابع حاشیه‌ای پیوسته $F_1, \dots, F_n$ تابع مفصل یکنای C وجود دارد به طوری که:

1. Copula
2. Nelsen
3. Mendes and Souza
4. n-Increasing
5. Grounded

$$F(x_1, \dots, x_n) = C\left(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\right) \quad (5)$$

طبق قضیه اسکالر، می توان گفت توابع توزیع چند متغیره پیوسته، حاشیه های یک متغیره و ساختار وابستگی چند متغیره، می توانند جدا شوند (نلسن، ۲۰۰۷).
خانواده تابع مفصل گاوسی به صورت

$$C^{Ga}(u, v; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \quad (6)$$

است که در آن Φ_ρ تابع توزیع نرمال استاندارد دو متغیره با ضریب هم بستگی ρ است. همچنین تابع مفصل دو متغیره t-استودنت به صورت:

$$C(u, v; \rho, \vartheta) = t_{\rho, \vartheta}\left(t_\vartheta^{-1}(u), t_\vartheta^{-1}(v)\right) \quad (7)$$

تعریف می شود که $t_{\rho, \vartheta}$ تابع توزیع توام دو متغیره با ضریب هم بستگی ρ است.
در پژوهش های تجربی، بررسی ساختارهای مختلف هم بستگی بین متغیرها به منظور مدلسازی بهتر آنها و نیز انتخاب مدل مناسب امری ضروری است. از این رو وابستگی های مورد بررسی در این پژوهش در ارتباط با تابع مفصل به اختصار ارائه می شود.
فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با توزیع های حاشیه ای F و G باشند، در این صورت ضریب وابستگی دنباله ای بالایی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P\{Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)\} \quad (8)$$

که به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - P(X \leq F^{-1}(u)) - P(Y \leq G^{-1}(u)) + P(X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(u))}{1 - P(X \leq F^{-1}(u))} \quad (9)$$

بنابراین با در نظر گرفتن $C(0, 0, \theta)$ به عنوان یک خانواده از توابع مفصل، اگر

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u, \theta)}{1 - u}$$

موجود باشد، گوئیم C دارای وابستگی دنباله ای بالایی است اگر و فقط

اگر $\lambda_U \in (0, 1)$ ؛ همچنین می‌توان گفت تابع مفصل C دارای وابستگی دنباله‌ای پایینی λ_L است هرگاه $\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{C(u, u; \theta)}{1-u} = 0$ موجود باشد. اگر $\lambda_L \in (0, 1)$ آن‌گاه گوییم C دارای وابستگی دنباله‌ای پایینی است.

شبیه‌سازی مونت کارلو

ایده شبیه‌سازی مونت کارلو، تکرار شبیه‌سازی فرآیند تصادفی حاکم بر قیمت و یا بازده ابزار مالی مورد بررسی است. در تخمین Var ، هر شبیه‌سازی ارزش احتمالی سبد دارایی را در پایان دوره نگه‌داری ارائه می‌دهد. اگر تعداد کافی از این شبیه‌سازی‌ها در اختیار داشته باشیم، توزیع شبیه‌سازی شده ارزش‌های سبد دارایی به توزیع درست ولی ناشناخته سبد نزدیک خواهد شد و می‌توان از این توزیع برای استنباط Var و $CVar$ استفاده کنیم.

برای به کار بردن فرآیند شبیه‌سازی لازم است چندین مرحله طی شود. نخستین مرحله، تعیین فرآیندهای تصادفی است که بر اساس آن شیوه شکل‌گیری متغیر موردنظر تشریح می‌شود. به بیان دیگر، این مرحله شامل انتخاب مدلی برای متغیر یا متغیرهای تصادفی موردنظر است. در حقیقت مرحله اول معادل تابع نگاشت سبد دارایی در فرآیند محاسبه Var است. در مرحله بعد به هر کدام از عوامل کلیدی ریسک موجود در تابع نگاشت، یک توزیع آماری نسبت داده می‌شود و پارامترهای آن‌ها یعنی تلاطم-ها، هم‌بستگی‌ها و بازده بر اساس قضاوت پژوهشگر، داده‌های تاریخی و یا داده‌های جاری بازار برآورد می‌شود. مرحله دوم متناظر با فرآیند استنباط است. این دو گام ورودی‌های شبیه‌سازی مونت کارلو می-باشد. در مرحله سوم، مسیرهای شبیه‌سازی شده برای متغیرهای تصادفی ایجاد می‌شود. بدین ترتیب هر مجموعه از اعداد تصادفی، مجموعه‌ای از قیمت‌های پایانی فرضی را برای ابزار مالی موجود در سبد دارایی تولید می‌کند. سپس این شبیه‌سازی‌ها به اندازه کافی تکرار می‌شود تا اطمینان حاصل شود که توزیع شبیه‌سازی شده به اندازه کافی به توزیع واقعی و ناشناخته ارزش‌های سبد دارایی نزدیک است. اکنون می‌توان Var یا سایر سنج‌های ریسک را از این توزیع نماینده استخراج کرد.

شبیه‌سازی مفصل نرمال و تی

توزیع نرمال چند متغیره به طور عمده در کاربردهای مدیریت ریسک برای شبیه‌سازی توزیع n عامل ریسک موثر در ارزش ریسک بازار استفاده می‌شود. مفصل نرمال وابستگی دمی بالایی

ندارد. افزون بر آن از آن جایی که توزیع‌های بیضوی متقارن هستند، ضریب وابستگی دمی بالایی و پایینی معادل هستند. از این رو مفصل نرمال وابستگی دم پایین هم ندارد. برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی از مفصل نرمال، می‌توانیم روش زیر را استفاده کنیم. اگر ماتریس R معین مثبت تعریف شده باشد، آن‌گاه بعضی ماتریس‌های $n \times n$ ، A وجود دارند به طوری که $R = AA^T$. هم‌چنین فرض شد که متغیرهای تصادفی $Z_1, \dots, Z_n$ نرمال استاندارد مستقل هستند. بنابراین بردار تصادفی $\mu + AZ$ (که در آن $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ و بردار $\mu \in R^n$) دارای توزیع نرمال n -متغیره با بردار میانگین μ و ماتریس کوواریانس R است. ماتریس A به آسانی با تجزیه چولسکی R تعیین می‌شود. از این رو می‌توان متغیرهای تصادفی از مفصل نرمال n -بعدی را با الگوریتم زیر تولید کرد:

الگوریتم ۱

۱. با استفاده از تجزیه چولسکی ماتریس R ، ماتریس A تعیین می‌شود.
۲. n تا متغیر تصادفی نرمال استاندارد مستقل $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ شبیه‌سازی می‌شود.
۳. بردار $X = AZ$ محاسبه می‌شود.
۴. اجزای $i = 1, \dots, n$ ، $u_i = \phi(x_i)$ تعیین می‌شود.
۵. بردار $(u_1, \dots, u_n)^T$ یک متغیر تصادفی از مفصل نرمال n -بعدی C_R^{Ga} است. برای شبیه‌سازی از مفصل t -استودنت n -متغیره فرض کنید X برداری با یک توزیع t -استودنت n -متغیره و با درجه آزادی θ ، بردار میانگین μ (برای $\theta > 1$) و ماتریس کوواریانس $\frac{\theta}{\theta-2} \Sigma$ (برای $\theta > 2$) باشد که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$X = \mu + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{S}} Z \quad (10)$$

که $\mu \in R^n$ و $S \sim \chi_{\theta}^2$ و بردار تصادفی $Z \sim N_n(0, \Sigma)$ مستقل‌اند. مفصل بردار X مفصل t -استودنت با درجه آزادی θ است که نمایش تحلیلی آن به شکل زیر است:

$$C_{\theta,R}^t(u) = t_{\theta,R}^n(t_{\theta}^{-1}(u_1), \dots, t_{\theta}^{-1}(u_n)) \quad (11)$$

که $R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$ برای $i, j \in \{1, \dots, n\}$ و $t_{\theta, R}^n$ تابع توزیع چند متغیره بردار تصادفی $\frac{\sqrt{\theta}Y}{\sqrt{S}}$ است که متغیر تصادفی S و بردار تصادفی Y مستقل‌اند و t_{θ} حاشیه‌های $t_{\theta, R}^n$ هستند. می‌توان نشان داد که بر خلاف مفصل نرمال، مفصل t -استودنت وابستگی دم بالا دارد. از این رو مفصل t -استودنت، برای شبیه‌سازی وقایعی مانند سقوط سهم بازار مناسب‌تر از مفصل نرمال است. برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی مفصل t -استودنت $C_{\theta, R}^t$ می‌توان از الگوریتم زیر که براساس فرمول (۹) است، استفاده شود:

الگوریتم ۲

۱. با استفاده از تجزیه چولسکی ماتریس R ، ماتریس A تعیین می‌شود.
۲. n تا متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ شبیه‌سازی می‌شود.
۳. متغیر تصادفی S از توزیع χ_{θ}^2 و مستقل از Z شبیه‌سازی می‌شود.
۴. بردار $Y = AZ$ تعیین می‌شود.
۵. بردار $X = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{S}}Y$ محاسبه می‌شود.
۶. اجزای $i = 1, \dots, n$ ، $u_i = t_{\theta}(x_i)$ تعیین می‌شود.

کاربرد مفصل در اندازه‌گیری ریسک بازار

فرض کنید هدف این است که در زمان t اندازه ریسک بازار با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو تخمین زده شود. دوره نگهداری $[t, t+1]$ و متغیر تصادفی X_{t+1} با تابع توزیع F در نظر گرفته می‌شود. توزیع سود و زیان سبد در دوره $[t, t+1]$ توصیف می‌شود. فرض کنید $Y_{t+1} = (Y_{1,t+1}, Y_{2,t+1}, \dots, Y_{d,t+1})$ بردار تصادفی پایه با بازده‌های عامل ریسک موثر در ارزش سبد در لحظه $t+1$ باشد و بنابراین ارزش متغیر تصادفی X_{t+1} عبارت است از:

$$X_{t+1} = f\left(Y_{t+1}\right) = f\left(Y_{1,t+1}, Y_{2,t+1}, \dots, Y_{d,t+1}\right) \quad (12)$$

که f تابعی است که بازده‌های عامل ریسک را به ارزش سبد و بنابراین به X_{t+1} مرتبط می‌کند. برای تخمین توزیع متغیر تصادفی X_{t+1} ما به یک سری زمانی تاریخی با m داده

$Y_t, \dots, Y_{t-m+1}$ برای بازده‌های عامل ریسک نیاز داریم. هسته فعال فرایند تخمین، شبیه سازی مونت کارلوی n سناریو برای بردار تصادفی Y_{t+1} است. برای انجام این کار لازم است تا یک شکل تحلیلی خاص برای تابع توزیع چند متغیره Y_{t+1} فرض کنیم. توزیع نرمال چند متغیره یک فرض استاندارد در بسیاری از کاربردهای مدیریت ریسک است. در حقیقت این توزیع برای اجرا در یک مدل آسان است. مشاهدات تجربی ثابت کرده‌اند که نرمال چند متغیره برای این کار مناسب نیست، زیرا ضخامت دم حاشیه‌ها و ساختار وابستگی داده‌ها را در نظر نمی‌گیرد.

فرم توزیعی برای توزیع‌های حاشیه‌ای $Y_{i,t+1}$ و ساختار وابستگی آن‌هایی را که به‌وسیله یک تابع مفصل مناسب توصیف شده‌اند، در نظر می‌گیرد. حاشیه‌ها و پارامترهای مفصل، از داده‌های تاریخی فرض شده است. وقتی که n سناریو برای بازده‌های عامل ریسک تولید شوند، به آسانی می‌توان n تحقق برای متغیر تصادفی $X_{t+1} = f(Y_{t+1})$ تعیین کرد. بنابراین می‌توان توزیع سود و زیان شبیه‌سازی شده را ساخت. گزینه‌هایی برای تخمین اندازه ریسک وجود دارد (کلودیو، ۲۰۰۰) که در این پژوهش برای تخمین اندازه ریسک ابتدا زیان سبد محاسبه می‌شود. برای این کار، با توجه به توزیع داده‌ها و قیمت در لحظه t به‌وسیله شبیه‌سازی مونت کارلو قیمت در لحظه $t+1$ محاسبه می‌شود. حال بازده‌های تصادفی که از شبیه‌سازی مونت کارلو به‌دست آمده را در فرمول زیان قرار داده و زیان سبد تعیین می‌شود. سپس زیان تصادفی در دسترس را با استفاده از فرمول Var_{α} سبد محاسبه می‌شود (رادپور و عبده تبریزی، ۱۳۸۸). برای محاسبه $CVaR$ از زیان‌هایی که بدترین سناریوها را دارند میانگین گرفته می‌شود. به عبارت دیگر میانگین تمام زیان‌هایی که بیشتر از زیان در سطح اطمینان α هستند، محاسبه می‌شود.

پژوهش حاضر بر اساس هدف کاربردی و نوع رویکرد کمی و نیز بر اساس نحوه گردآوری داده‌ها در گروه پژوهش‌های توصیفی و پژوهش اسنادی کتابخانه‌ای است. نمونه آماری در این پژوهش شش شرکت پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران است که از شش صنعت مختلف انتخاب شده‌اند. علت انتخاب این شرکت‌ها نوسانات قیمتی پایین، حجم معاملات و شاخص‌ساز بودن آنها در بازار بورس اوراق بهادار است. داده‌های انتخاب شده در بازه زمانی فروردین ۱۳۹۶ تا خرداد ۱۴۰۰ ثبت شده‌اند. مانایی داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار R بررسی و سپس به کمک نرم‌افزار MATLAB سبدهای بهینه محاسبه شد.

یافته‌های پژوهش

در این پژوهش از داده‌های ماهانه سهام‌های صنایع خدمات انفورماتیک، بانک تجارت، زامیاد، پالایش نفت اصفهان، فولاد و صنایع مس ایران از تاریخ فروردین ۹۶ تا خرداد ۱۴۰۰ می‌باشد استفاده شده است. قیمت سهم، واریانس و بازده مورد انتظار هر یک از دارایی‌ها در جدول ۱ ارائه شده است. بازده مورد انتظار در جدول ۱ طبق رابطه زیر محاسبه شده است:

$$r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \times 100$$

که p_t قیمت در ماه t و p_{t-1} قیمت در ماه $t-1$ است.

جدول ۱. داده‌های مورد نیاز مدل‌سازی

دارایی i ام	قیمت پایانی p_{it}	بازده مورد انتظار r_t	انحراف معیار
خدمات انفورماتیک	۳۸۴۱	-۰/۰۰۴۳	۰/۰۷۲۹
بانک تجارت	۱۸۵۷	۰/۰۰۲۵	۰/۰۳۲۹
زامیاد	۷۷۹۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۳۵۷
پالایش نفت اصفهان	۵۷۸۰	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۴۸۳
فولاد	۱۰۱۵۰	۰/۰۰۲۳	۰/۰۸۴۵
صنایع مس ایران	۱۳۲۹۰	۰/۰۰۱۶	۰/۰۴۲۱

معمولاً برای محاسبه وابستگی بین دو متغیر تصادفی از ضرایب همبستگی مانند ρ پیرسون یا τ کندال استفاده می‌شود. از آنجایی که ضریب همبستگی پیرسون تحت تغییرات حاشیه‌ای پایا نیست و نمی‌توان آن را برحسب تابع مفصل بیان کرد از اندازه‌های وابستگی دیگری مانند τ کندال استفاده می‌شود که برابر است با تفاضل احتمالات هماهنگ بودن و هماهنگ نبودن دو متغیر است و براساس تابع مفصل به صورت زیر تعریف می‌شود (نلسن، ۲۰۰۷):

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_v, u_v) dC(u_v, u_v) - 1.$$

ماتریس همبستگی بازده دارایی‌ها و ویژگی‌های آماری هریک از سهام‌ها به ترتیب در جدول ۲ و ۳ نمایش داده شده است. با توجه به جدول ۲، بیش‌ترین همبستگی بین سهام‌های

بانک تجارت و پالایش نفت اصفهان و کم‌ترین هم‌بستگی بین فولاد و پالایش نفت اصفهان وجود دارد.

جدول ۲. هم‌بستگی τ کندال بین بازده دارایی‌ها

صنایع مس ایران	فولاد	پالایش نفت اصفهان	زامیاد	بانک تجارت	خدمات انفورماتیک	
۰/۰۳۳۰۴۷	۰/۰۱۷۷۷-	۰/۰۲۹۸۵-	۰/۰۵۴۷۶۴	۰/۰۷۹۱۵	۱	خدمات انفورماتیک
۰/۰۳۵۳۳-	۰/۰۲۹۸۱-	۰/۰۸۷۰۶۳	۰/۱۹۵۲۶۱	۱	۰/۰۷۹۱۵	بانک تجارت
۰/۰۳۱۰۰۸	۰/۰۰۶۹۸۳	۰/۱۷۲۲۷۸	۱	۰/۱۹۵۲۶۱	۰/۰۵۴۷۶۴	زامیاد
۰/۱۱۴۲۲۱	۰/۰۴۵۳۸۲	۱	۰/۱۷۲۲۷۸	۰/۰۸۷۰۶۳	۰/۰۲۹۸۵-	پالایش نفت اصفهان
۰/۰۲۶۴۳۲	۱	۰/۰۴۵۳۸۲	۰/۰۰۶۹۸۳	۰/۰۲۹۸۱-	۰/۰۱۷۷۷-	فولاد
۱	۰/۰۲۶۴۳۲	۰/۱۱۴۲۲۱	۰/۰۳۱۰۰۸	۰/۰۳۵۳۳-	۰/۰۳۳۰۴۷	صنایع مس ایران

از نتایج جدول ۳ مشاهده شد که بیش‌ترین میانگین برای سهام خدمات انفورماتیک و کم‌ترین میانگین قیمت برای سهام بانک تجارت ایران است. از بین این سهام‌ها سهام خدمات انفورماتیک و بانک تجارت دارای چولگی منفی هستند به این معنی که بیش‌ترین بازده‌ها در مقداری بیش از میانگین رخ داده است. همچنین تمامی سهام‌ها دارای کشیدگی مثبت هستند و این یعنی توزیع سهام از منحنی نرمال کشیده‌تر است.

جدول ۳. اطلاعات آماری دارایی‌ها

دارایی نام	میانگین	انحراف معیار	کشیدگی	چولگی
خدمات انفورماتیک	۲۳۶۷۱	۱۴۴۱۳	۱/۸۱۳	۰/۰۱۶-
بانک تجارت	۲۴۶۶	۸۵۸	۲/۹۳۶	۰/۳۷۴-
زامیاد	۹۹۰۵	۶۴۰۶	۵/۳۷۹	۱/۶۳۰
پالایش نفت اصفهان	۱۵۲۵۴	۹۷۵۷	۶/۹۱۲	۲/۰۷۸
فولاد	۶۴۳۸	۴۷۳۵	۲/۵۸۰	۰/۸۰۹
صنایع مس ایران	۱۶۷۷۸	۷۹۸۷	۲/۹۶۱	۱/۱۲۶

برای تحلیل مانایی داده‌های مورد بررسی در این پژوهش با استفاده از آزمون دیکي-فولر تعمیم یافته می‌توان با اطمینان بیش‌تری در مورد تشخیص مانایی سری زمانی بحث کرد. فرض صفر آزمون این است که سری ریشه واحد دارد یعنی نامانایی برقرار است. پس از بررسی آزمون ریشه واحد مشاهده شد که همه سهام‌های مورد بررسی نامانا هستند. برای رفع نامانایی با یک بار تفاضل‌گیری نتیجه مانایی به صورت جدول ۴ برای همه برقرار شد. از آنجایی که مقدار احتمال برای تمام دارایی‌ها کمتر از ۰/۰۵ است و هم‌چنین مقدار قدر مطلق آماره آزمون دیکي-فولر تعمیم یافته از قدر مطلق مقدار بحرانی در سطح تعیین شده بیش‌تر است. پس فرض صفر رد شده و سری مانا است.

جدول ۴. بررسی مانایی دارایی‌ها بر اساس آزمون دیکي-فولر تعمیم یافته پس از یک بار تفاضل‌گیری

نام سهام	خدمات انفورماتیک	بانک تجارت	زامیاد	پالایش نفت اصفهان	فولاد	صنایع مس ایران
P - مقدار	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
آماره آزمون	-۶/۳۶۰۷	-۶/۸۷۷۹	-۵/۰۹۰۱	-۴/۶۴۹۱	-۶/۳۱۳۲	-۷/۲۲۰۴

پس از توصیف داده‌ها و بررسی مانایی آن‌ها ابتدا $CVaR$ سبد شامل داده‌های تاریخی برآورد می‌شود که نتایج حاصل از این برآورد در جدول ۵ نشان داده شده است.

جدول ۵. نتایج مدل‌سازی ضرر با داده‌های تاریخی سازمان بورس

$CVaR (۰/۹۹)$	-۲۳۳۸۰۰
$CVaR (۰/۹۵)$	-۲۰۴۶۰۰

در ادامه به شبیه‌سازی ضرر سبد بهینه تحت فرضیه‌های مختلف از توزیع حاشیه‌ای بازده‌ها و تابع مفصل آن‌ها پرداخته می‌شود. ارزش سبد در لحظه t به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$P_t = \sum_{i=1}^6 x_i P_{it},$$

که در آن P_{it} قیمت سهام i ام در لحظه t و x_i تعداد سهم i ام در سبد است. حال فرض کنید در زمان t قرار داریم و هزار سناریو شبیه سازی مونت کارلو برای بازده دارایی R_{ij} به ازای $i = 1, \dots, 6$ و $j = 1, \dots, 1000$ در افق زمانی $[t, t+1]$ با فرض شکل های تحلیلی متفاوتی برای حاشیه ها و مفصل هایشان، وجود دارد. با استفاده از این سناریوها سبد در لحظه $t+1$ ارزش گذاری شده است:

$$P_{j,t+1} = \sum_{i=1}^6 x_i P_{it} (1 + R_{ij}) \quad j = 1, \dots, 1000$$

زیان های سبد در سناریو j به صورت زیر بیان می شود:

$$P_t - P_{j,t+1} = \sum_{i=1}^6 x_i [P_{it} - P_{it} (1 + R_{ij})] = \sum_{i=1}^6 x_i P_{it} R_{ij} \quad j = 1, \dots, 1000$$

در ادامه با داده های شبیه سازی شده توزیع سود و زیان سبد محاسبه می شود. برای تخمین اندازه ریسک پس از مرتب کردن مقادیر زیان به صورت صعودی، Var با قطع کردن توزیع شبیه سازی شده در سطح احتمال انتخاب شده تخمین زده می شود و $CVaR$ ارزش مورد انتظار زیان در بدترین سناریوها است. با فرض داشتن توزیع حاشیه ای متغیرها به دنبال توزیع با هم آن ها هستیم. به طور عمده در کاربردهای مدیریت ریسک برای شبیه سازی عوامل ریسک مؤثر در ارزش سبد از توزیع نرمال استفاده می شود. می توان نشان داد که مفصل های تی - استیودنت به دلیل داشتن وابستگی دمی بهتر از مفصل های نرمال پیشامدهای نهایی را شبیه سازی می کنند.

در جدول ۶ نتایج مدل سازی ضرر سبد بهینه با شبیه سازی مونت کارلو براساس $CVaR(0/99)$ ارائه شده است. در این جدول پنج سبد بهینه با سطح بازده کم تا زیاد در نظر گرفته شده است و متناظر با هر سبد بهینه میزان ضرر سبد تحت فرضیه های مختلف از توزیع بازده حاشیه ای و مفصل آن ها با احتمال ۰/۰۱ درصد محاسبه شده است.

جدول ۶. شبیه‌سازی ضرر سبد بهینه براساس $CVaR(0/99)$ تحت فرضیه‌های مختلف از توزیع

حاشیه‌ای بازده‌ها و تابع مفصل

ارزش سبد P_t	سبد بهینه با روش $CVaR$		نوع توزیع‌های حاشیه‌ای و تابع مفصل در برآورد حداکثر ضرر سبد			
	بازده	ریسک	توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل t_2	توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل t_4	توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل t_{10}	توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل نرمال
۴۳۷۰۰	-۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۲۰۹۵	-۲۰۵۲۶۶	-۸۴۸۹۹	-۶۱۷۳۵	-۱۷۷۲
۳۷۸۹۴	-۰/۰۰۰۵۸	۰/۰۲۲۷۲	-۲۱۱۰۷۲	-۹۰۷۰۵	-۶۷۵۴۱	-۱۷۹۸
۴۵۷۸۵	۰/۰۰۰۶۹	۰/۰۳۰۱۸	-۲۰۳۱۸۱	-۸۲۸۱۴	-۵۹۶۵۰	۳۱۲
۴۰۳۸۶	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۴۶۵۴	-۲۰۸۵۸۰	-۸۸۲۱۳	-۶۵۰۴۹	-۵۰۸۶
۴۲۲۵۱	۰/۰۰۴۱۲	۰/۰۶۹۸۰	-۲۰۶۷۱۵	-۸۶۳۴۸	-۶۳۱۸۴	-۳۲۲۱

همچنین در جدول ۷ نتایج مدل‌سازی ضرر سبد بهینه با شبیه‌سازی مونت کارلو براساس $CVaR(0/95)$ ارائه شده است. در این جدول پنج سبد بهینه با سطح بازده کم تا زیاد در نظر گرفته شده است و متناظر با هر سبد بهینه میزان ضرر سبد تحت فرضیه‌های مختلف از توزیع بازده حاشیه‌ای و مفصل آن‌ها با احتمال ۰/۰۵ درصد محاسبه شده است.

جدول ۷. شبیه‌سازی ضرر سبد بهینه براساس $CVaR(0/95)$ تحت فرضیه‌های مختلف از توزیع

حاشیه‌ای بازده‌ها و تابع مفصل

ارزش سبد P_t	سبد بهینه با روش $CVaR$		نوع توزیع‌های حاشیه‌ای و تابع مفصل در برآورد حداکثر ضرر سبد			
	بازده	ریسک	توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل t_2	توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل t_4	توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل t_{10}	توزیع‌های حاشیه‌ای و مفصل نرمال
۴۳۷۰۰	-۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۲۰۹۵	-۱۱۰۴۹۷	-۶۳۹۵۲	-۴۷۶۰۹	-۱۳۸۷
۳۷۸۹۴	-۰/۰۰۰۵۸	۰/۰۲۲۷۲	-۱۱۶۳۰۳	-۶۹۷۵۸	-۵۳۴۱۵	-۱۱۹۳
۴۵۷۸۵	۰/۰۰۰۶۹	۰/۰۳۰۱۸	-۱۰۸۴۱۲	-۶۱۸۶۷	-۴۵۵۲۴	۶۹۸
۴۰۳۸۶	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۴۶۵۴	-۱۱۳۸۱۱	-۶۷۲۶۶	-۵۰۹۲۳	-۴۷۰۱
۴۲۲۵۱	۰/۰۰۴۱۲	۰/۰۶۹۸۰	-۱۱۱۹۴۶	-۶۵۴۰۱	-۴۹۰۵۸	-۸۹۷

همان طور که در جدول ۶ و ۷ مشاهده می شود میانگین ضرر محاسبه شده براساس توزیع های حاشیه ای و مفصل t_p با احتمال ۰/۰۱ درصد برابر ۲۰۵۲۶۶- و با احتمال ۰/۰۵ برابر ۱۱۰۴۹۷- است که نزدیکترین مقدار به ضرر محاسبه شده از داده های تاریخی را نشان می دهند و بنابراین توزیع تی - استیودنت همراه با مفصل تی در درجات آزادی کم، نتایجی دقیق تر نسبت به توزیع نرمال تولید می کند.

بحث و نتیجه گیری

درمجموع پژوهش های داخلی محدودی در خصوص استفاده از توابع مفصل در سبد بهینه صورت پذیرفته است و پژوهش های موجود هم متمرکز بر روی مقایسه معیارهای ریسک یا روش های مختلف حل مسائل بهینه سازی است که روش های عددی تا روش های فراابتکاری مورد استفاده قرار گرفته اند. به عنوان نمونه بابالویان و همکاران (۱۳۹۹) و زمانی و همکاران (۱۳۹۹) فقط محاسبه CVaR را با روش های پارامتریک و شبیه سازی مورد بررسی قرار دادند. دسته ای دیگر از پژوهش ها به بهینه سازی سبد با معیارهای مختلف ریسک می پردازند. به عنوان نمونه میرزایی و زارعی محمودآبادی (۱۳۹۹) و نیکو و همکاران (۱۳۹۹) به مدل سازی عملکرد سبد سهام پرداختند. اما در هیچ کدام از آنها اثر وابستگی سهام موجود در سبد دارایی بر هم و تاثیر آن بر ضرر سهام مورد بررسی قرار نگرفته است.

تابع مفصل ساختار وابستگی دمی یک متغیر تصادفی چند متغیره را توصیف می کند، با استفاده از تابع مفصل، ساختار وابستگی بین بازده دارایی های یک سبد در افق زمانی معین به دست آمد و به عنوان یک ابزار انعطاف پذیر برای شبیه سازی بازده های عوامل ریسک استفاده شد. این عوامل ریسک روی ارزش یک سبد بازار اثر گذار هستند و ثابت شد که چگونه برخی از توابع مفصل در شبیه سازی مونت کالو برای تخمین اندازه ریسک مناسب تر است زیرا مقدار ضرر واقعی و بیشتری را برآورد کردند. به عنوان نمونه با مفصل تی t_2 با میزان بسیار بزرگی نسبت به ارزش سبد ضرر سبد پیش بینی می شود. برای اندازه گیری ریسک سبد در این پژوهش تغییرات هم زمان بازده عوامل ریسک و توزیع سود و زیان مؤثر روی سبد بهینه مدل سازی می شود. برای انجام این کار ابتدا سبد بهینه با روش CVaR محاسبه شده است. با داده های تاریخی اندازه واقعی ضرر سبد بهینه را محاسبه کرده سپس با استفاده از تابع مفصل پیشامدهای نهایی و وابستگی های غیر نرمال مدل سازی می شود و توزیع سود و زیان سبد را شبیه سازی کرده

در نهایت نتایج به‌دست آمده را با نتایج حاصل از داده‌های تاریخی مقایسه و دقیق‌ترین تخمین به داده‌های تاریخی، به‌عنوان ریسک سبد در نظر گرفته می‌شود.

نتایج به‌دست آمده از تخمین حداکثر زیان سبد سهام شامل شش سهم بورس اوراق بهادار تهران، میانگر آن است که استفاده از مفصل نرمال برای بازده دارایی‌ها (بازده ضریب ریسک)، اندازه ریسک را کمتر از مقدار واقعی آن تخمین می‌زند. برای جلوگیری از این خطا از مفصل‌هایی با توزیع تی-استیودنت به جای توزیع نرمال برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی بازده دارایی‌ها استفاده شده است. به این ترتیب یک برآورد دقیق‌تر برای اندازه ریسک به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر توزیع تی-استیودنت به این دلیل که وابستگی دمی دارد یعنی پیشامدهای نهایی را بهتر شبیه‌سازی می‌کند برای تخمین ریسک سبد مناسب‌تر از توزیع نرمال عمل می‌کند.

ملاحظات اخلاقی

پیروی از اصول اخلاق پژوهش

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این پژوهش علمی رعایت نموده‌اند و این موضوع مورد تأیید همه آنهاست.

تعارض منافع

بنا بر اظهار نویسندگان این مقاله تعارض منافع ندارد.

مشارکت نویسندگان

جمع‌آوری داده‌ها، تهیه گزارش پژوهش و تحلیل داده‌ها با مشارکت یکسان هر دو نویسنده است.

تعارض منافع

بنا بر اظهار نویسندگان این مقاله تعارض منافع ندارد.

حامی مالی

مقاله حاضر حامی مالی ندارد.

سپاسگزاری

از داوران محترم به خاطر ارائه نظرهای ساختاری و علمی سپاسگزاری می‌شود.

References

- Abad, P; Benito, S; & López, C. (2014). A comprehensive review of Value at Risk methodologies. *The Spanish Review of Financial Economics*, 12(1), 15-32. <https://doi.org/10.1016/j.srfe.2013.06.001>
- Adinehvand, D.; Ali Razini, E.; Khoddam, M.; Ohadi, F. & Hashemizadeh, E. (2023). Examining the Efficiency Models, Markowitz Mean–Semi Variance, VaR and multi-objective Genetic Algorithm (NSGAII) under MSV and CVAR risk criterion in Selection Optimal Portfolio Shares Listed Firms on Stock Exchange. *Journal of Securities Exchange*, 16(61): 159-180, <https://doi.org/10.22034/jse.2022.11826.1876>. (In Persian)
- Babaloyan, Sh, Niko Maram, H, VakiliFard, H.R; and Rahnamay Rood Poshti, F. (2019). Comparing the Value at Risk of Tehran Stocks with International Stock Markets Using the Conditional Free Value Theory. *Financial Economics*, 14(52), 55-80. (In Persian). [20.1001.1.25383833.1399.14.52.3.3](https://doi.org/10.1001.1.25383833.1399.14.52.3.3)
- Bedoui, R; Benkraiem, R; Guesmi, Kh; Kedidi, I; (2023). 1. Portfolio optimization through hybrid deep learning and genetic algorithms vine Copula-GARCH-EVT-CVaR model. *Technological Forecasting and Social Change*, [doi: 10.1016/j.techfore.2023.122887](https://doi.org/10.1016/j.techfore.2023.122887). <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2023.122887>
- Behzadi, A. (2019) Measuring portfolio risk by considering sequential asymmetric correlation in Tehran Stock Exchange. *Financial Research* 22(4) 567-542. (In Persian) [10.22059/frj.2020.295548.1006976](https://doi.org/10.22059/frj.2020.295548.1006976)
- Brooks, C; Clare, A. D; Dalle Molle, J. W; & Persaud, G. (۲۰۰۵). A comparison of extreme value theory approaches for determining value at risk. *Journal of empirical finance*, 12(2), 339-352. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2004.01.004>
- Chen, W; XU, H; Shouyang, W. (2023). Error correction and decomposition method for forecast of interval-valued stock price time series. *Systems Engineering*. 2023, 43(2): 383-397. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2023.109920>
- Fallah Shams, M. (2010), Comparative study of the efficiency of risk measurement model and GARCH econometric model and market risk forecasting in Tehran Stock Exchange, *Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 5(1), 137-157. (In Persian). [20.1001.1.22519165.1389.1.5.6.3](https://doi.org/10.1001.1.22519165.1389.1.5.6.3)
- Gerami, J. and Sajjadi, S.M; (2016). Evaluating the performance and market risk of commercial banks using fuzzy data envelopment analysis. *International Journal of Data Envelopment Analysis*, 5(1 (17th issue), 1167-1182. (In Persian) . <https://sid.ir/paper/242732/fa>
- Habibi Samar, J; Tehrani, R. and Ansari, K. (2015). Investigating the relationship between liquidity risk and market risk with growth and value stock returns

- using the AHP model in Tehran Stock Exchange. *Financial Engineering and Securities Management*, 6(23), 39-58. (In Persian).
<https://sanad.iau.ir/Journal/fej/Article/1079305/FullText>
- Haddadi, M.R; Jalili, P; and Goodarzi, S. (2019). Optimal portfolio diversification strategy using WCVaR and β risk measures, comparing it with the Monte Carlo method, *Financial Engineering and Securities Management*, 45, 101-126. (In Persian).
<https://sanad.iau.ir/Journal/fej/Article/1078312?culture=fa>
- Haddadi, M.R; Nademi, Y; and Tafi, F (2017). Stock portfolio optimization using MAD and CVaR criteria by comparing four classical and meta-heuristic methods, *Financial Engineering and Securities Management*, 47, 514-533. (In Persian). <https://sanad.iau.ir/fa/Journal/fej/Article/1078273>
- Hasheminejad, S.M; Abdollahi, M.R. (2015). *Financial Risk Forecasting*, First Edition, Stock Exchange Information and Services Company, Stock Exchange Publications. (In Persian).
<https://www.boursepub.ir/%D9%BE%DB%8C%D8%B4%D8%A8%DB%8C%D9%86%DB%8C-%D8%B1%DB%8C%D8%B3%DA%A9-%D9%85%D8%A7%D9%84%DB%8C-5>
- Hong, K. R; Huang, X; Kim, J. S; & Kim, N. H. (2023). A multi-objective mean-semivariance model for project selection using reinvestment and synergy under uncertainty. *Expert Systems with Applications*, 217, 119586.
<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.119586>
- Khayatiyan, A.H; and Mesniniai, M. (2014) Presenting a hybrid optimization model for project and stock portfolios using the mean-half-variance-half-entropy approach. *Research in Production and Operations Management*. 15(2) 81-57. [10.22108/POM.2024.141000.1547](https://doi.org/10.22108/POM.2024.141000.1547) (In Persian)
<https://doi.org/10.22108/pom.2024.141000.1547>
- Kianizadeh, H; Baghani, A. & Hamidian, M. (2023). Comparing the accuracy of selected Machin learning models for stock price prediction in stock exchange market. *Journal of Securities Exchange*, 16(62): 75-102, [22034/10/jse.11636/1733/2021](https://doi.org/10.22034/10/jse.11636/1733/2021). (In Persian)
- Kole, E; Markwat, T; Opschoor, A; & Van Dijk, D. (2017). Forecasting value-at-risk under temporal and portfolio aggregation. *Journal of Financial Econometrics*, 15(4), 649-677. <https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbx019>
- Konno, H; & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, 37(5), 519-531.
- Konno, H; Shirakawa, H; & Yamazaki, H. (1993). A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model. *Annals of Operations Research*, 45(1), 205-220. <https://doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519>

- Mendes, B.V. M. and Souza, R. M. (2004), Measuring Financial Risks with Copulas, *International Review of Financial Analysis*, 27-45. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2004.01.007>
- Lu, Q; Sun, Y; Hong, Y; & Wang, S. (2022). Forecasting interval-valued crude oil prices using asymmetric interval models. *Quantitative Finance*, 22(11), 2047-2061. <https://doi.org/10.1080/14697688.2022.2112065>
- Mirabi, M; and Zarei Mahmoudabadi, M; (2019). Optimizing portfolio selection under risk conditions with a hybrid genetic algorithm (GA) and lever optimization (LOA). *Journal of Financial Management Perspective*, (32)10, 33-56. (In Persian) <https://doi.org/10.52547/JFMP.10.32.33>
- Nabavi Chashmi, S.A. and Bahramzadeh, R. (2018). Investigating the efficiency of the Levy process in pricing options. *Financial Knowledge of Securities Analysis* (38)11, 117-127. (In Persian). <https://sanad.iau.ir/Journal/jfksa/Article/803425>
- Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. New York, NY: Springer New York. https://link.springer.com/chapter/10.1007/0-387-28678-0_5
- Niko, S.F, Shams, Sh; Sayqali, M. (2019). Modeling the optimal stock portfolio selection based on risk assessment and behavioral finance approach (mental accounting) in Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Management Perspective*, (31)10, 101-75. (In Persian). <https://doi.org/10.52547/jfmp.10.31.75>
- Nisi, A; Maleki, B. and Rezaian. R. (2016). Estimating the parameters of the European option pricing model under an underlying asset with stochastic volatility using the loss function approach, *Journal of Financial Engineering and Securities Management* 28. (In Persian). <https://sanad.iau.ir/Journal/fej/Article/1079398/FullText>
- Radpour, M. and Abdo Tabrizi, H; (2009), *Measuring and Managing Market Risk with a Value at Risk Approach*, 1st Edition, Tehran, Pishbard and Aghah. (In Persian) <https://db.ketab.ir/bookview.aspx?bookid=1469416>
- Rocco, M. (2014). Extreme value theory in finance: A survey. *Journal of Economic Surveys*, 28(1), 82-108. <https://doi.org/10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x>
- Rockafellar, R. T; Uryasev, S; & Zabarankin, M. (2006). Generalized deviations in risk analysis. *Finance and Stochastics*, 10(1), 51-74. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00780-005-0165-8>
- Romano, C. (2002). Applying copula function to risk management. In *Capitalia, Italy*. <http://www.icer.it/workshop/Romano.pdf>
- Sadeghi Khansari, M; and Sadeghi Khansari, A; (2016), Market Risk Calculation Methods, *International Conference on Accounting and Management with Modern Research Science*, 6, 2-4. (In Persian). <https://civilica.com/doc/636980/>

- Sage, A. P. (2015). Risk modeling, assessment, and management. John Wiley & Sons. <https://www.wiley.com/en-us/>
- Sakalauskas, V; Kriksciuniene, D; & Imbrazas, A. (2023). Stock Portfolio Risk-Return Ratio Optimisation Using Grey Wolf Model. In Data Science in Applications (pp. 211-232). Springer International Publishing. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-24453-7_10
- Sklar, A. (1959), Fonctions de Repartition a Dimensions et Leurs Marges, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Pari*, 229-231.
- Soleimani Sarvestani, S; Davodi, S.M.R and Kheradmand, A. (2024) Optimal portfolio of daily volatility based on interval forecasting of value with vector autoregression approach, Quarterly Journal of the Stock Exchange. 17(65) 69-86.(In Persian)
- Yazdanian, N; Haji Akbari, A. (2019). Investigating the effect of exchange rate fluctuations on the levels of skewness and elasticity of portfolio returns of stocks of companies listed on the Tehran Stock Exchange. Financial Management Perspective, (25)121:9-146. (In Persian)
- Zhang, J; & Zhang, K. (2022). Portfolio selection models based on interval-valued conditional value at risk (ICVaR) and empirical analysis. Fractal Fract. 6(10), 536.